-1997年度　③

数　学　問　題

（理　工　必　須）

（全２ページ）

指　示　事　項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の $\boxed{}$ にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙・下書用紙は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数　学

I　$a>0, b>0$ を定数とし，だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上に点P$(a\cos\theta, b\sin\theta)$ $\left(ただし，0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ をとる。Pにおける接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれA，Bとすると，Aの座標は（$\boxed{ア}$，0），Bの座標は（0，$\boxed{イ}$）である。また，点Pと点$(0, b)$を通る直線が x 軸と交わる点をC，点Pと点$(a, 0)$を通る直線が y 軸と交わる点をDとすると，Cの座標は（$\boxed{ウ}$，0），Dの座標は（0，$\boxed{エ}$）である。線分ABの長さは $\boxed{オ}$ であり，この最小値は $\boxed{カ}$ である。また，3つの線分AB，AC，BDの長さの和は，$\tan\theta=\boxed{キ}$ のとき最小値 $\boxed{ク}$ をとる。

II　正の数 a，b，c に対して，

$$x_0=0,\quad x_n=\frac{ax_{n-1}+b}{cx_{n-1}+a}\quad (n=1, 2, \cdots)$$

で与えられる数列 $\{x_n\}$ について考える。

そこで，行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ を使って

$$u_0=0,\quad v_0=1,\quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}\quad (n=1, 2, \cdots)$$

によって数列 $\{u_n\}$ と $\{v_n\}$ を定める。行列 $B=\begin{pmatrix} \boxed{ケ} & -\boxed{ケ} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$（ただし，$\boxed{ケ}>0$）に対して，

$$AB=B\begin{pmatrix} \boxed{コ} & 0 \\ 0 & \boxed{サ} \end{pmatrix}$$

となるので，

$$A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boxed{シ} & \boxed{ケ}\times\boxed{ス} \\ \dfrac{1}{\boxed{ケ}}\times\boxed{ス} & \boxed{シ} \end{pmatrix}$$

となる。これより a，b，c を用いて $u_n=\boxed{セ}$，$v_n=\boxed{ソ}$ と表され，したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n=\boxed{タ}$ となり数列 $\{x_n\}$ の極限値が求められる。

III $\boxed{}$ には数または s, t を用いて記入せよ。

$s>0$, $t>0$ とする。放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ ……①と直線 $y=sx+t$ ……②の交点をP, Qとし, P, Qの x 座標をそれぞれ α, β (ただし, $\alpha<\beta$) とする。

放物線①と直線②で囲まれる部分の面積を S_1 とおくと, $S_1=(\beta-\alpha)$ $\boxed{チ}$ である。また, この直線②, および3直線 $y=0$, $x=\alpha$, $x=\beta$ で囲まれる台形の面積を S_2 とおくと, $S_2=(\beta-\alpha)$ $\boxed{ツ}$ である。s を固定して $t\to\infty$ とすると $\dfrac{S_1}{S_2}\to$ $\boxed{テ}$ となり, 逆に t を固定して $s\to\infty$ とすると $\dfrac{S_1}{S_2}\to$ $\boxed{ト}$ となる。

次に, 原点をOとして, 放物線①と線分OPで囲まれる部分の面積を S_3, ①と線分OQで囲まれる部分の面積を S_4 とおくと, $S_3+S_4=(\beta-\alpha)$ $\boxed{ナ}$ となる。したがって, s, t を動かすとき, $\dfrac{s^2}{t}$ の動く範囲を考慮すれば, $\dfrac{S_1}{S_3+S_4}$ のとりうる値の範囲は $\boxed{ニ}<\dfrac{S_1}{S_3+S_4}<\boxed{ヌ}$ であることがわかる。

IV $0<\theta<\pi$ において, 関数

$$f(\theta)=\frac{(2-\sqrt{3})\cos\theta-\sin\theta+1}{1-\cos\theta}$$

について考える。

$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{t}$ とおくと, t を用いて $\cos\theta=$ $\boxed{ネ}$, $\sin\theta=$ $\boxed{ノ}$,

$f(\theta)=$ $\boxed{ハ}$ と表される。これから $f(\theta)=0$ となる θ を θ_1, θ_2 (ただし, $\theta_1<\theta_2$) とすると, $\theta_1=$ $\boxed{ヒ}$, $\theta_2=$ $\boxed{フ}$ である。そして

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{f(\theta)}{1-\cos\theta}d\theta=\boxed{ヘ}$$

となる。