1997年度　①

数　学　問　題

（理　工　必　須）

（全２ページ）

指　示　事　項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の $\boxed{}$ にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙・下書用紙は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数　学

I　平面上の点 $A(5, \sqrt{2})$, $B(6, 0)$ をとり，原点 O と A を通る直線を l, A と B を通る直線を m とする。$\angle OAB = \theta$ とおくと，$\cos\theta =$ $\boxed{\text{ア}}$ である。次に，直線 l 上に点 P, m 上に点 Q をとり，P, Q の y 座標は共に正であるとする。

$OP - OA = a$, $BQ - BA = b$ とおくと，線分 PQ の長さは $\boxed{\text{イ}}$ と表される。

$ab \neq 0$ のとき，三角形 APQ の面積 S は $\boxed{\text{ウ}}$ となり，三角形 APQ の外接円の半径は PQ の $\boxed{\text{エ}}$ 倍となる。この外接円の面積を T とすると，$\dfrac{T}{S}$ が最小となるための条件は a と b が関係式 $\boxed{\text{オ}}$ $(ab \neq 0)$ を満たすことであり，$\dfrac{T}{S}$ の最小値は $\boxed{\text{カ}}$ である。

II　平面上に 3 点 $A(3, 0)$, $B(-3, 0)$, $C(0, 3)$ をとる。$0 < k < 1$ とし，線分 AC を $k : (1-k)$ に内分する点 P の座標は $\boxed{\text{キ}}$ ，線分 BC を $(1-k) : k$ に内分する点 Q の座標は $\boxed{\text{ク}}$ である。このとき直線 AQ の方程式は $y =$ $\boxed{\text{ケ}}$ で，直線 BP の方程式は $y =$ $\boxed{\text{コ}}$ である。2 線分 AQ, BP の交点を $R(x, y)$ とすると，k を用いて $x^2 =$ $\boxed{\text{サ}}$ ，$y + 3 =$ $\boxed{\text{シ}}$ と表され，これらから k を消去すれば点 R は方程式 $\boxed{\text{ス}}$ で表される曲線上にあることがわかる。

III 〔1〕 kを自然数とし，$y=\dfrac{k}{x^k}$のグラフをCとする。$a \neq 0$に対し，点$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{k}{a^k}\right)$における$C$の接線が$x$軸と交わる点をHとすると，Hの$x$座標は $\boxed{\text{セ}}$ である。

〔2〕 $a_0=1$とし，x軸上に点$\mathrm{H}_0(a_0,\ 0)$をとる。H_0を通りy軸に平行な直線とCとの交点P_0をとり，P_0におけるCの接線がx軸と交わる点を$\mathrm{H}_1(a_1,\ 0)$とする。次に，H_1を通りy軸に平行な直線とCとの交点をP_1として，P_1におけるCの接線がx軸と交わる点を$\mathrm{H}_2(a_2,\ 0)$とする。これをくり返してC上の点P_nとx軸上の点$\mathrm{H}_n(a_n,\ 0)$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$をとる。また，三角形$\mathrm{H}_{n-1}\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{H}_n$$(n=1,\ 2,\ \cdots)$の面積を$S_n$とおく。このとき$k$と$n$を用いて$a_n=\boxed{\text{ソ}}$，$S_n=\boxed{\text{タ}}$となり，また$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\boxed{\text{チ}}$となる。

〔3〕 $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=e$を既知とする。このことから，$e$を使って$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\boxed{\text{タ}}=\boxed{\text{ツ}}$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\boxed{\text{チ}}=\boxed{\text{テ}}$と表される。

IV xとyは

$$\begin{cases} x\cos\theta+y\sin\theta=0 \\ x\sin\theta-y\cos\theta=\cos\theta-1 \end{cases}$$

を満たしているとする。ただし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$とする。

〔1〕 これを解くと，$x=\boxed{\text{ト}}$，$y=\boxed{\text{ナ}}$となる。

〔2〕 $x+y$は$\theta=\boxed{\text{ニ}}$のとき最小値$\boxed{\text{ヌ}}$をとり，$\theta=\boxed{\text{ネ}}$のとき最大値$\boxed{\text{ノ}}$をとる。

〔3〕 曲線$x=\boxed{\text{ト}}$，$y=\boxed{\text{ナ}}$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$の長さは$\boxed{\text{ハ}}$である。