

数 学 問 題

(理 工 必 須)

(全 2 ページ)

指 示 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙・下書用紙は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

I a, b を実数とするとき, 2つの曲線 $y = -(x+3)^2 + a$ と $y = x^2 + b$ とが異なる2点 P, Q で交わるための必要十分条件は, ア である。このとき, 点 P, Q

の x 座標は $\frac{\text{イ} \pm \sqrt{\text{ウ}}}{2}$, y 座標は $\frac{\text{エ} \mp \text{オ} \sqrt{\text{ウ}}}{2}$

(複号同順) である。したがって, 線分 PQ の長さ l は カ である。

a, b が

$$\frac{5}{2} \leq a \leq 5, \quad -5 \leq b \leq -\frac{5}{2}$$

の範囲で動くとき, l は, $(a, b) = \text{キ}$ のとき最小値 ク をとり,
 $(a, b) = \text{ケ}$ のとき最大値 コ をとる。

II 複素数 z, w が, $|z| = \sqrt{2}$, $|w| = 2$, および

$$z^3 - z^2 + 2z = w$$

を満たすとする。両辺の絶対値を考えると, $z\bar{z} = \text{サ}$ であるから,

$|z + \bar{z} - 1| = \text{シ}$ となる。これより, $z + \bar{z} = \text{ス}$ または セ となり,
 z は2次方程式 ソ $= 0$ または タ $= 0$ の解である。

したがって,

$$\begin{cases} z = \text{チ} \\ w = \text{ツ} \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} z = \text{テ} \\ w = \text{ト} \end{cases} \quad (\text{複号同順})$$

となる。

Ⅲ 伸び縮みのない長さ 2π の糸の一端を原点 $O(0, 0)$ に固定し、他方の端 P を点 $A(2\pi, 0)$ 上に置く。そして糸をたるまないように端 P を移動させながら、 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ の円周上に反時計まわりに巻き付けていく（すなわち、糸は円の接線方向に引っ張られている）。円の中心を B とする。円周上の点 Q まで巻き付いたとき、 $\angle OBQ = \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) と置く。このとき、 Q の座標は θ を用いて ナ と表される。また、点 P, Q を通る直線の傾きは ニ であり、 PQ の長さは ヌ となるので、 P の座標は ネ である。すべて巻き付くまでに P が描く曲線の長さは ノ である。

Ⅳ $f(x) = \sin x + 2\cos x$ とする。区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ において、 $f(x)$ の最小値は ハ , 最大値は ヒ である。最大値を与える点を α とすると、 $\tan \alpha =$ フ である。いま、定積分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{f(x)} dx, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{f(x)} dx,$$

を考える。 $I =$ ヘ である。また、 $J - 2K =$ ホ , $2J + K =$ マ であることより、 $J =$ ミ , $K =$ ム である。