

数 学 問 題

(理 工 必 須)

(全 2 ページ)

指 示 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙・下書用紙は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

I (1) 数列 $\{a_n\}$ を, $a_1 = 1$,

$$a_n = \frac{1}{5} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k + n \right), \quad n = 2, 3, \dots$$

で定義する。 $a_{n+1} - a_n$ は a_n を用いて, $a_{n+1} - a_n = \boxed{\text{ア}}$ となるので,
 $b_n = a_n + 1$ とおくと, 数列 $\{b_n\}$ は初項 $\boxed{\text{イ}}$, 公比 $\boxed{\text{ウ}}$ の等比数列になる。したがって, $a_n = \boxed{\text{エ}}$ である。

(2) e を自然対数の底とし, α を正の定数とするとき, 定積分

$$I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\log x)^\alpha}$$

を求めたい。 $t = \log x$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = \boxed{\text{オ}}$ であるから, I を t に関する

定積分で書くと, $I = \boxed{\text{カ}}$ となる。したがって, $\alpha \neq \boxed{\text{キ}}$ のとき,

$I = \boxed{\text{ク}}$, $\alpha = \boxed{\text{キ}}$ のとき, $I = \boxed{\text{ケ}}$ となる。

II 複素数 $z = -8\sqrt{3} + 8i$ の絶対値を r , 偏角 $\arg z$ を θ ($0^\circ \leq \theta < 360^\circ$) とすると,
 $r = \boxed{\text{コ}}$, $\theta = \boxed{\text{サ}}$ である。複素数 α が $\alpha^2 = z$ をみたし, 虚部が正であるとする。 α を極形式で表すと, $\alpha = \boxed{\text{シ}}$ である (ただし, $0^\circ \leq \arg \alpha < 360^\circ$ とする)。 α の条件より, α の実部は $\sqrt{6} + \boxed{\text{ス}}$ で, 虚部は $\sqrt{6} + \boxed{\text{セ}}$ である。 α^n が実数となる自然数 n で最小のものは $n = \boxed{\text{ソ}}$ である。 n が 100 以上で最小のものは $n = \boxed{\text{タ}}$ である。自然数 m で α^m の絶対値が初めて 2000 以上になるのは, $m = \boxed{\text{チ}}$ のときである。

実部が負である複素数 β をとって, 複素数平面において, α , β , 0 を表す点をそれぞれ A, B, O とする。 $\triangle ABO$ が正三角形になるとき, $\beta = \boxed{\text{ツ}}$ である。

Ⅲ $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ とするとき、 x の 2 次関数

$$f(x) = x^2 + (\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta)x - \sqrt{3} \cos \theta \sin \theta$$

を考える。 $f(x) = (x - \boxed{\text{テ}})(x - \boxed{\text{ト}})$ となるので、 $f(x) = 0$ が重解を持つための θ の条件は、 $\theta = \boxed{\text{ナ}}$ である。 $\alpha = \boxed{\text{テ}}$ 、 $\beta = \boxed{\text{ト}}$ とするとき、 $|\alpha - \beta|$ は $\theta = \boxed{\text{ニ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ヌ}}$ をとる。

$\theta = 90^\circ$ のとき、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸が囲む部分の面積は $\boxed{\text{ネ}}$ である。また、その部分を x 軸の周りに一回転させてできる回転体の体積は $\boxed{\text{ノ}}$ である。

Ⅳ a は正の数とする。定積分で表された x の関数

$$f(x) = \int_0^x (|t - 2| + |x - 2|) dt$$

は、

$x \leq \boxed{\text{ハ}}$ のとき、 $f(x) = \boxed{\text{ヒ}}$ 、 $x \geq \boxed{\text{ハ}}$ のとき、 $f(x) = \boxed{\text{フ}}$ である。したがって、 $0 \leq x \leq a$ における $f(x)$ の最大値 $S(a)$ は

$$\begin{aligned} a \leq \boxed{\text{ヘ}} \text{ のとき、 } S(a) &= \boxed{\text{ホ}}, \\ \boxed{\text{ヘ}} \leq a \leq \boxed{\text{マ}} \text{ のとき、 } S(a) &= \boxed{\text{ミ}}, \\ a \geq \boxed{\text{マ}} \text{ のとき、 } S(a) &= \boxed{\text{ム}} \end{aligned}$$

となる。