

数 学

次の各問いについて解答用紙に解答せよ。Ⅰ，Ⅱについては にあてはまるものを記入せよ。

Ⅰ 2つの2次関数

$$y = ax^2 + bx + c \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$y = cx^2 + bx + a \quad \cdots \textcircled{2}$$

があって、これらのグラフは第1象限の点Aおよび第3象限の点Bで交わっている。さらに、原点Oは、この2つのグラフが囲む領域D(境界は含まない)内にある。このとき、次の各問いに答えよ。

〔1〕 次の選択肢㉔～㉙の中で、上記の条件から、3つの定数 a, b, c の符号に関して結論できるものを1つだけ選んで、 ア に記入せよ。

3つの定数 a, b, c について

(選択肢) ㉔ 1個は正であるが、あとの2個についてはいろいろな場合がありうる。

㉕ 正のものが2個、負のものが1個である。

㉖ 正のものが1個、0のものが1個、負のものが1個である。

㉗ 正のものが1個、負のものが2個である。

㉘ 1個は負であるが、あとの2個についてはいろいろな場合がありうる。

㉙ いろいろな場合があって、上のどれにも該当しない。

〔2〕 領域Dの面積 S_1 は a と c を使って $S_1 =$ イ と表される。

〔3〕 $ac = -1, b = 1$ のとき、①、②のグラフ(放物線)の頂点を頂点とし、辺が座標軸に平行であるような長方形の面積を S_2 とする。

S_2 は $a =$ ウ , $c =$ エ , または $a =$ オ , $c =$ カ のとき
最小値 キ をとる。

Ⅱ〔1〕複素数 $\alpha = \sqrt{3} - i$ (i は虚数単位) に関して以下の問いに答えよ。

(1) α^n (n は正の整数) が実数となる最小の n の値は $n =$ であり、
このとき、 α^n の値は である。

(2) 点 α を原点 O のまわりに、正の向きに 60° 回転した点を表す複素数は であり、負の向きに 60° 回転した点を表す複素数は である。

〔2〕虚数の複素数 α の極形式を

$$\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

とし、複素平面上で、 α , α^2 , α^3 を表す点をそれぞれ P, Q, R とする。

$\triangle PQR$ が $\angle PQR = 90^\circ$ の直角二等辺三角形であるとき、

$r =$ であり、 $\theta =$ または である。

Ⅲ 図のように、1 辺の長さ 1 の正方形 $ABCD$ の辺 AB , BC , CD , DA 上にそれぞれ点 P , Q , R , S を $AP = BQ = CR = DS$ であるようにとる。

さらに、4 辺形 $PQRS$, $\triangle APS$, $\triangle BQP$, $\triangle CRQ$, $\triangle DSR$ のおのにおに内接する円 O , O_1 , O_2 , O_3 , O_4 をつくる。

〔1〕 このとき円 O の半径 r および円 O_n の半径 r_n ($n = 1, 2, 3, 4$) を

$AP = x$ を用いて表せ。

〔2〕 5 つの円 O , O_1 , O_2 , O_3 , O_4 の面積の和を最小にする x の値と、その最小値を求めよ。

ただし、円周率を π とする。

