

I $f(x)$ および $g(x)$ はともに整式で,

$$f(\sin \theta) = \sin 3\theta, \quad g(\sin \theta) = \sin 5\theta$$

を満たすとする、 $f(x) = \boxed{\text{ア}}$ であり、 $g(x) = \boxed{\text{イ}}$ である。

このとき、 $f(x)$ の $-1 \leq x \leq 1$ における最大値は $\boxed{\text{ウ}}$, 最小値は $\boxed{\text{エ}}$ となる。

また、方程式 $g(x) = 0$ の $-1 \leq x \leq 1$ における解の個数は $\boxed{\text{オ}}$ である。

いま、定積分 I, J を

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad J = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(g(x))^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

とおくと、 $I = \boxed{\text{カ}}$, $J = \boxed{\text{キ}}$ である。

II xy 平面上の曲線 $C: y = x^3$ 上の点 $P_t(t, t^3)$ における接線を T_t で表し、
 点 $P_b(b, b^3)$ における接線を T_b で表すとする。 $t > 0$ とし、 T_t 上の点で x 座標
 が s であるものを Q_s とすると、その座標は、 $Q_s = (s, \boxed{\text{ク}})$ と与えられる。
 このとき、 T_b が Q_s を通るための条件は、 b についての 3 次方程式

$$2b^3 + \boxed{\text{ケ}} b^2 + \boxed{\text{コ}} b + \boxed{\text{サ}} = 0$$

によって表される。左辺を因数分解すると、

$$(\boxed{\text{シ}})(\boxed{\text{ス}})$$

となるので、 Q_s を通るような C の接線が T_t のみであるような s の値は、

$$\boxed{\text{セ}} < s < \boxed{\text{ソ}} \cdots \cdots (*)$$

となる。

s が $(*)$ の範囲を動くときの Q_s の全体は T_t 上の線分となるが、この線分を S_t で表す。いま、 $a > 0$ とし、 t が $0 < t < a$ の範囲で動くとき、 S_t 上の点全体の集合は、 xy 平面上のある領域となる。この領域とその境界を加えた図形の面積を求めると

$\boxed{\text{タ}}$ である。ただし、 $\boxed{\text{シ}}$ には、 b についての適当な 1 次式、 $\boxed{\text{ス}}$ には、 b についての適当な 2 次式を入れよ。

Ⅲ 放物線 $y = x^2$ 上の点 $P(a, a^2)$ (ただし, $a > 0$ とする) における接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{チ}}x + \boxed{\text{ツ}}$$

と表され, 点 P におけるこの放物線の法線の方程式は

$$y = \boxed{\text{テ}}x + \boxed{\text{ト}}$$

と表される。

いま, 点 P において放物線と同じ接線をもつ円で, x 軸に接する円を考える。

このような円は 2 個あり, その中心をそれぞれ $O_1(p, q)$, $O_2(r, s)$ とおく (ただし, $r < p$ とする)。このとき, a を用いて表すと,

$$p = \boxed{\text{ナ}}, q = \boxed{\text{ニ}}$$

となり, 2 点 O_1 と O_2 の距離は $\boxed{\text{ヌ}}$ となる。また,

$$\frac{rs}{pq} = \boxed{\text{ネ}}$$

が成り立ち,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{r}{p} = \boxed{\text{ノ}}$$

である。

IV a を 0 でない定数とすると、以下の問いに答えよ。

[1] 2 次方程式 $x^2 - a^2x - 2 = 0$ の解を p, q とするとき、

$$p^2 + q^2 = \boxed{\text{ハ}}, \quad p^3 + q^3 = \boxed{\text{ヒ}}, \quad p^4 + q^4 = \boxed{\text{フ}}$$

となる。

[2] $g(x)$ は x の 2 次の整式で、 $g'(0) = 0$, $g(0) = -\frac{2}{a^3}$ を満たしているとする。また、 $f(x)$ は x の整式で、

$$f(x) - g(x) = a^4 \int_0^{\frac{x}{a}} f(t) dt - \frac{x^4}{4} + x^3$$

とすると、 $f(x)$ の次数は $\boxed{\text{ヘ}}$ である。このとき、 $f(x), g(x)$ を求めると、

$$f(x) = \boxed{\text{ホ}}, \quad g(x) = \boxed{\text{マ}}$$

となる。いま、 xy 平面において $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積を S とすると、

$$S = \boxed{\text{ミ}}$$

となり、 a の値にかかわらず $S > r$ を満たすような実数 r で最大のものは

$$\boxed{\text{ム}} \text{ である。}$$