

数 学

次の各問いについて解答用紙に解答せよ。Ⅰ，Ⅱについては にあてはまるものを記入せよ。

Ⅰ a を正の整数とし、放物線 $y = ax^2 + bx + c \cdots \textcircled{1}$

で次の条件(1)，(2)，(3)をすべて満たすものを求めたい。

- (1) 2つの正の整数 m と n (ただし、 $m < n$ とする) が2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解になっている。
- (2) 放物線 $\textcircled{1}$ ， x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積と、放物線 $\textcircled{1}$ と x 軸で囲まれた図形の面積が等しい。
- (3) 放物線 $\textcircled{1}$ の接線で $(n, 0)$ を通る直線の y 軸との交点の y 座標が -18 である。

まず、条件(1)，(2)より $n = \text{ア} m$ となる。このとき(3)の接線の傾きは a と m を用いて イ と表され、この接線と y 軸との交点の y 座標は a と m を用いて ウ となる。そこで条件(3)を使うと $a = \text{エ}$ ，
 $m = \text{オ}$ となる。したがって求める放物線は、

$$y = \text{エ} x^2 + \text{カ} x + \text{キ}$$

である。

ただし、 ア ， エ ， オ ， カ ， キ には実数を記入せよ。

II 方程式 $x^6 - 64 = 0$ の4つの虚数解のうち、偏角 θ が $0^\circ < \theta < 90^\circ$ であるものを α とする。 $\alpha = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ で、他の3つの虚数解 β, γ, δ は、 $z = 2(\cos\theta + i\sin\theta)^k$ と表される。

ここに、 k は6以下の自然数である。そこで k の小さい方から順に β, γ, δ とする。

(1) $\theta =$ で、 k は、 β, γ, δ の順で , , となる。

(2) $\gamma =$ α で、 $\beta + \gamma =$, $\beta\gamma =$ となる。

(3) $\delta^2 - 2\delta =$ で、 $\delta^5 + 2\delta^4 + 4\delta^3 + 8\delta^2 + 16\delta =$ となる。

(4) 複素数平面上で3点 $O(0), B(\beta), C(\beta^2)$ を頂点とする $\triangle OBC$ の面積 S は、

$S =$ で、これは3点 $O(0), A(\alpha), D(\delta)$ を頂点とする $\triangle OAD$ の面積

T との間に $S =$ T なる関係が成立する。

ただし、上の $\sim$ に実数を記入せよ。

Ⅲ 複素数平面上の円

$$|z - (1 + i)| = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が与えられている。

次に m を整数, n を正の整数とすると, 2 次方程式

$$x^2 - 2mx + m^2 + n = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

の解を複素数平面上で考える。

② の解が, ① の円の内部 (円周上を含まない) に少なくとも 1 つ存在するような m, n の組合せをすべて求めよ。

(注) $\sqrt{2}$ の近似値は, 1.4142, $\sqrt{3}$ の近似値は, 1.732 とする。