

数 学

次の各問いについて解答用紙に解答せよ。□にあてはまるものを記入せよ。

I 放物線 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) (a は実数) におけるこの放物線の接線の方程式は $y = \square \text{ ア}$ である。この接線に関して点 $(0, k)$ (k は正の実数) と対称な点 (p, q) を考える。 $t = \frac{1}{4a^2 + 1}$ とおくと、 q は t に関する 1 次式として

$$q = \square \text{ イ} t + \square \text{ ウ}$$

と表される。(□ イ, □ ウ) には k の式を入れよ。) ここで、点 (a, a^2) が放物線上を動くとき、 t の動く範囲は □ エ なので、 q のとり得る値の範囲を k ごとに求めると、

$$0 < k < \square \text{ オ} \text{ のとき } \square \text{ カ} < q \leq \square \text{ キ},$$

$$k = \square \text{ オ} \text{ のとき } q = \square \text{ ク},$$

$$\square \text{ オ} < k \text{ のとき } \square \text{ ケ} \leq q < \square \text{ コ}$$

となる。

II a を実数とし, $f(\theta) = -a \sin^2 \theta + 2 \cos \theta$ を考える。 θ が $0^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$ で動くとき, $f(\theta)$ の最小値を $m(a)$ とすれば,

$a \leq$ のとき, $m(a) =$

$\leq a \leq$ のとき, $m(a) =$

$\leq a$ のとき, $m(a) =$

となる。したがって, a が実数全体を動くとき, $m(a)$ の最大値は である。

ただし, から には, 実数または a の式を入れよ。

ヒント: $\cos \theta = t$ とおいて考えてみよ。

Ⅲ a を正の実数とする。放物線 $y = x^2 + 1$ 上の点 $P = (a, a^2 + 1)$ における、この放物線の接線を l_1 とする。 l_1 の方程式は $y =$ テ であり、 l_1 が x 軸と交わる点 Q の x 座標は ト である。この放物線の点 Q を通るもうひとつの接線を l_2 とすると、 l_2 とこの放物線の接点の x 座標は ナ である。 l_1, l_2 およびこの放物線で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とすると、 $S(a) =$ ニ である。 $S(a)$ は $a =$ ヌ のとき最小値 ネ をとる。