

数 学

次の各問いについて解答用紙に解答せよ。Ⅰ，Ⅱについては にあてはまるものを記入せよ。

Ⅰ 以下の にあてはまる実数を記入せよ。

〔1〕 複素数平面上で点 z が原点を中心とする半径1の円周上を動くとき、

$$v = (\sqrt{3} + i)(z + 1) \quad (i \text{ は虚数単位})$$

で表される点 v は点 ア + イ i を中心とし、半径 ウ の円を描く。点 v が実軸上にくるのは $z =$ エ + オ i のときと $z =$ カ + キ i のときである。また、点 v が虚軸上にくるのは $z =$ ク + ケ i のときと $z =$ コ + サ i のときである。

〔2〕 α を絶対値が1の複素数とする。複素数平面上で点 z が原点を中心とする半径1の円周上を動くとき、

$$w = \alpha(\sqrt{3} + i)(z + 1)$$

で表される点 w の描く円が実軸に接するのは $\alpha =$ シ + ス i のときと $\alpha =$ セ + ソ i のときである。

Ⅱ 長さ 2 の線分 AB を直径とする半円をとり、辺 AB の中点を O とする。弧 AB 上に点 A, B と異なる点 C をとり、 $\angle AOC = \theta$ とおく。また、弧 AC 上に点 D をとり、線分 AC と線分 OD の交点を E とおいたとき、 $\triangle ADE$ と $\triangle COE$ が相似になるような点 D をとることができるための必要十分条件は $\boxed{\text{タ}} < \theta < \boxed{\text{チ}}$ である。

さて、 θ がこの範囲にあり、D を $\triangle ADE$ と $\triangle COE$ が相似になるようにとったとしよう。このとき $\angle AOD = \boxed{\text{ツ}}$ である。したがって線分 AD の長さは $\boxed{\text{テ}}$ ，線分 DE の長さは $\boxed{\text{ト}}$ であり、 $\triangle COE$ の面積は $\boxed{\text{ナ}}$ となる。とくに、 $\triangle ADE$ の面積と $\triangle COE$ の面積が等しくなるのは $\theta = \boxed{\text{ニ}}$ のときである。

Ⅲ k を正の実数として、 $f(x) = -x^2 + 2kx - \frac{3}{4}k^2$ を考える。また、 p は与えられた自然数で奇数とする。このとき条件

「整数 $x = n+1, n+2, \dots, n+p$ では $f(x) > 0$, その他の整数 x に対しては $f(x) < 0$ 」

を満たす k の範囲と整数 n の値を求めよ。

ただし、次の事実を利用してよい。

実数 a, b, c, d が $a < b, c < d$ を満たしているとき、2つの不等式 $a < x < b, c < x < d$ を同時に満たす実数 x があるための必要十分条件は、 $a < d$ かつ $c < b$ である。