

数 学

I 放物線 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) (a は実数) におけるこの放物線の接線の方程式は $y = \boxed{\text{ア}}$ である。この接線に関して点 $(0, k)$ (k は正の実数) と対称な点 (p, q) を考える。 $t = \frac{1}{4a^2 + 1}$ とおくと、 q は t に関する 1 次式として

$$q = \boxed{\text{イ}}t + \boxed{\text{ウ}}$$

と表される。($\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ には k の式を入れよ。) ここで、点 (a, a^2) が放物線上を動くとき、 t の動く範囲は $\boxed{\text{エ}}$ なので、 q のとり得る値の範囲を k ごとに求めると、

$$0 < k < \boxed{\text{オ}} \text{ のとき } \boxed{\text{カ}} < q \leq \boxed{\text{キ}},$$

$$k = \boxed{\text{オ}} \text{ のとき } q = \boxed{\text{ク}},$$

$$\boxed{\text{オ}} < k \text{ のとき } \boxed{\text{ケ}} \leq q < \boxed{\text{コ}}$$

となる。

Ⅱ〔1〕 $2\cos 2\theta = f(2\cos \theta)$, $2\cos 3\theta = g(2\cos \theta)$, $2\cos 4\theta = h(2\cos \theta)$ を満たす整式 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ はそれぞれ $f(x) = \boxed{\text{サ}}$, $g(x) = \boxed{\text{シ}}$, $h(x) = \boxed{\text{ス}}$ である。

〔2〕 $\theta = \frac{2\pi}{7}$ のとき, $\frac{\cos 4\theta}{\cos 3\theta} = \boxed{\text{セ}}$ であるから, 〔1〕の結果より,
 $\alpha = 2\cos \frac{2\pi}{7}$ は4次方程式

$$x^4 + \boxed{\text{ソ}}x^3 + \boxed{\text{タ}}x^2 + \boxed{\text{チ}}x + \boxed{\text{ツ}} = 0$$

の解である。この式の左辺は $x - \boxed{\text{テ}}$ で割り切れるから, $\alpha \neq \boxed{\text{テ}}$ より, α は3次方程式

$$x^3 + \boxed{\text{ト}}x^2 + \boxed{\text{ナ}}x + \boxed{\text{ニ}} = 0$$

の解である。

〔3〕 〔1〕, 〔2〕の結果を用いて

$$2\left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7}\right) = \boxed{\text{ヌ}}$$

を得る。

* $\boxed{\text{セ}} \sim \boxed{\text{ヌ}}$ には適当な整数を入れよ。

Ⅲ 数列 $\{a_n\}$ は漸化式

$$a_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}, (a_{n+1})^n = 2(a_n)^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義されとする。これに対してもう 1 つの数列 $\{b_n\}$ を

$b_n = \log_2 a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定義すると、数列 $\{b_n\}$ は漸化式

$$\frac{b_{n+1}}{n+1} - \frac{b_n}{n} = \frac{1}{\boxed{\text{ネ}}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

($\boxed{\text{ネ}}$ には n の整式を入れよ。) を満たす。このことから数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \boxed{\text{ノ}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

($\boxed{\text{ノ}}$ には n の整式を入れよ。) であることがわかる。したがって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a_1 \times (\boxed{\text{ハ}})^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

($\boxed{\text{ハ}}$ には実数を入れよ。) となる。数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると、

$$S_n = \left(\boxed{\text{ヒ}} + \sqrt{\boxed{\text{フ}}} \right) \times \left\{ 1 - (\boxed{\text{ヘ}})^n \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

($\boxed{\text{ヒ}}$, $\boxed{\text{フ}}$ には有理数, $\boxed{\text{ヘ}}$ には実数を入れよ。) であり, $n \rightarrow \infty$ の

ときの S_n の極限值は $\boxed{\text{ホ}} + \sqrt{\boxed{\text{マ}}}$ ($\boxed{\text{ホ}}$, $\boxed{\text{マ}}$ には有理数を入れよ。) となる。

Ⅳ〔1〕 不定積分 $\int x \sqrt{1+x} dx$ を求めると $\boxed{\text{ミ}} \sqrt{\boxed{\text{ム}}} + C$ となる。

ただし、 C は積分定数である。($\boxed{\text{ミ}}$ には x の整式, $\boxed{\text{ム}}$ には x の 1 次式を入れよ。)

〔2〕 いま、座標平面上に動点 P がある。 P の x 座標、 y 座標はそれぞれ時刻 t ($t \geq 0$) の関数として

$$x = \frac{1}{2} t^2, \quad y = \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \quad \dots \text{①}$$

で表されている。時刻 t での動点 P の速さを求めると $\boxed{\text{メ}}$ となる。

($\boxed{\text{メ}}$ には t の式を入れよ。) また、動点 P が時刻 $t=0$ から $t=2$ までに動いた道のりは $\boxed{\text{モ}}$ である。($\boxed{\text{モ}}$ には実数を入れよ。)

〔3〕 ① で t を動かしたときに動点 P の描く曲線を $y=f(x)$ とすると、

$f(x) = \boxed{\text{ヤ}}$ である。($\boxed{\text{ヤ}}$ には x の式を入れよ。)

〔4〕 $y=f(x)$ と、 x 軸、および 2 つの直線 $x=0$, $x=5$ で囲まれる部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積は $\boxed{\text{ユ}}$ である。($\boxed{\text{ユ}}$ には実数を入れよ。)