

数 学

次の各問いについて解答用紙に解答せよ。問題文の にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

I a, b を正の実数とする。

座標平面上における 2 つの集合 S, T を

$$S = \{(x, y) \mid (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq a^2\},$$

$$T = \{(x, y) \mid |x-1| + |y+1| \leq b\}$$

とおく。

[1] 集合 S が第 2 象限 ($x < 0, y > 0$) に含まれるのは $0 < a < \span style="border: 1px solid black; padding: 0 10px;">ア のとき，かつ，そのときに限る。$

[2] 集合 T が第 4 象限 ($x > 0, y < 0$) に含まれるのは $0 < b < \span style="border: 1px solid black; padding: 0 10px;">イ のとき，かつ，そのときに限る。$

[3] S の面積と T の面積が等しくなるのは $a = \span style="border: 1px solid black; padding: 0 10px;">ウ のとき，かつ，そのときに限る。$

[4] $S \subseteq T$ であるための必要十分条件は， a および b が不等式 $b \geq \span style="border: 1px solid black; padding: 0 10px;">エ をみたすことである。$

[5] $T \subseteq S$ であるための必要十分条件は， a および b が不等式 $a \geq \span style="border: 1px solid black; padding: 0 10px;">オ をみたすことである。$

[6] すべての $b > 0$ に対して $S \cap T \neq \phi$ ，すなわち， S と T が共有点を持つための必要十分条件は $a \geq \span style="border: 1px solid black; padding: 0 10px;">カ である。他方， $0 < a < \span style="border: 1px solid black; padding: 0 10px;">カ のときには， $S \cap T \neq \phi$ であるための必要十分条件は $b \geq \span style="border: 1px solid black; padding: 0 10px;">キ である。$$$

注：記号 ' $A \subseteq B$ ' は教科書によっては ' $A \subset B$ ' とも書かれているので念のためその定義を書いておく。 $A \subseteq B$ とは，集合 A が集合 B の部分集合であることを表す。

Ⅱ 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC がある。 k を正の定数として、

OA を 1 : 2 に内分する点を L,

OB を 1 : 4 に内分する点を M,

OC を 1 : k に内分する点を N

とする。また、AM と BL の交点を P、BN と CM の交点を Q とし、OP の延長が AB と交わる点を R とする。

さらに、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ と表すことにしよう。

[1] $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を使って表すと

$$\overrightarrow{OP} = \boxed{\text{ク}} \vec{a} + \boxed{\text{ケ}} \vec{b}$$

となる。R は AB を 1 : $\boxed{\text{コ}}$ に内分し、線分 OR の長さは $\boxed{\text{サ}}$ である。

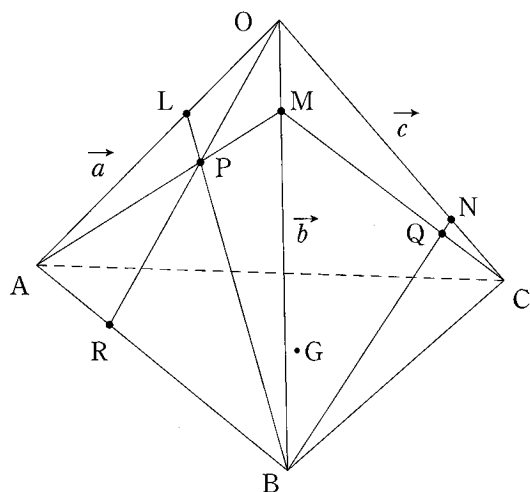
[2] $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を使って表すと

$$\overrightarrow{OQ} = \boxed{\text{シ}} \vec{b} + \boxed{\text{ス}} \vec{c}$$

となる。

[3] $\triangle ABC$ の重心を G とする。4 点 O, P, Q, G が同一平面上にあるのは

$k = \boxed{\text{セ}}$ のときであり、このとき線分 PQ の長さは $\boxed{\text{ソ}}$ である。



Ⅲ 数列 $\{a_n\}$ は, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$,

$$a_{n+1}(a_{n+2} + a_n) = 2a_n a_{n+2}(a_{n+1} + 1) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

をみたすものとする。このとき,

[1] $a_n \neq 0$ であることを示せ。(タ にその証明を書け。)

[2] $b_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$ ($n = 1, 2, \dots$) とおくと, $b_{n+1} - b_n =$ チ である。

[3] a_n を n を用いて表すと, $a_n =$ ツ である。

[4] 和 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ を n を用いて表すと, $S_n =$ テ となる。