

数 学

次の各問いについて解答用紙に解答せよ。Ⅰ，Ⅱについては にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ

〔1〕 $\log_{10} 2 = 0.3010$ ， $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(a) $\log_{10} \frac{1}{45} =$ ア である。

(b) $\left(\frac{1}{45}\right)^{54}$ で，小数点以下最初に0でない数字が現れるのは，小数第 イ 位で，その数字は ウ である。

(c) 18^{18} は， エ 桁の数で，最高位の桁の数字は オ ，末尾の数字は カ である。

(d) 5^{2002} は， キ 桁の数で，最高位の桁の数字は ク である。

〔2〕 a, b, c, d は0から9までの整数で， $a > d, b > c$ を満たすものとする。

このとき，4桁の整数 $n = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$ に対し，以下の問いに答えよ。

(a) 整数 n の1の位の数字と1000の位の数字を交換し，10の位の数字と100の位の数字を交換してできる整数を m とするとき， $n - m$ を上記の n の表現と同じような記法で示すと，

$$n - m = \text{ ケ } \times 10^3 + \text{ コ } \times 10^2 + \text{ サ } \times 10 + \text{ シ }$$

となる。(ケ ～ シ には0から9までのどれかを表す文字式または数を入れよ。)

(b) 上の整数 $n - m$ の1の位の数字と1000の位の数字を交換し，10の位の数字と100の位の数字を交換してできる整数を l とするとき，

$$n - m + l = \text{ ス }$$

である。

II 原点を中心とする半径2の円周上の動点を $P(x, y)$ とするとき

$$A = (x - 1)^2 (2x + y^2 - 4)(10x + 5y^2 - 28)$$

の最大値および最小値を求めたい。

[1] $P(x, y)$ が、原点を中心とする半径2の円周上にあることから、 y を x で表し、これを A に代入する。 $(x - 1)^2 = t$ とおくとき、 A は t の多項式として、 と表される。一方、 t の変化する範囲は不等式 で与えられる。

[2] を t の関数として $f(t)$ とおく。 t のとる範囲 を無視し、 t が実数全体を動くものとする、 $f(t)$ は $t =$ で極大値、 $t =$ で極小値をとる。

[3] 実際には、 t の変化する範囲は であるので、 $f(t)$ すなわち A の最大値は ($t =$ のとき)、最小値は ($t =$ のとき) である。

Ⅲ

〔1〕 数列 $\{x_n\}$ を

$$x_n = \frac{1}{1-x_{n+1}} - \frac{1}{1+x_{n+1}} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots ①$$

$$0 < x_{n+1} < 1 \quad \dots\dots ②$$

を満たすように定めたい。 $x_1 > 0$ が与えられたとき、 $x_2, x_3, \dots$ が一通りに定まることを示せ。

〔2〕 上の数列において

$$x_n = \tan \theta_n, \quad 0^\circ < \theta_n < 90^\circ \quad \dots\dots ③$$

とおく。 θ_n を n と θ_1 を使って表せ。

〔3〕 一方、初項 y_1 を与え、漸化式

$$y_{n+1} = \frac{1}{1-y_n} - \frac{1}{1+y_n} \quad \dots\dots ④$$

によって実数の数列 $\{y_n\}$ を定めようとする、もし、ある番号 n で $y_n = \pm 1$ となると y_{n+1} は定まらない。 y_4 までは定まるが、 y_5 が定まらないような初項 y_1 は何個あるか。