

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲの設問について解答せよ。ただし，Ⅰ，Ⅱについては問題文中の にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入せよ。

Ⅰ 1次関数 $f(x) = px + q$ ($p \neq 0$) について， $\{f(x)\}^2$ を単に $f^2(x)$ と表わすことにする。異なる実数 a, b に対して定積分 $S_q = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x) dx$ を計算すると，

$$〔1〕 \quad S_q = \text{ア} \left[(px + q)^3 \right]_a^b \text{ となり}$$

$$S_q = \text{ア} \{f(b) - f(a)\} \{f^2(b) + f(b)f(a) + f^2(a)\}$$

$$\text{よって } S_q = \text{イ} \{f^2(b) + f(b)f(a) + f^2(a)\} \geq 0 \text{ である。}$$

〔2〕 $g(x) = px + q - m$ も 1 次関数なので

$$\begin{aligned} S_{q-m} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b g^2(x) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \{f(x) - \text{ウ}\}^2 dx \geq 0 \text{ であるが，} \end{aligned}$$

展開すると

$$S_{q-m} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x) dx - \frac{\text{エ}}{b-a} \int_a^b f(x) dx + \frac{\text{オ}}{b-a} \int_a^b 1 dx \geq 0$$

となる。ここで $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ とおくと

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x) dx - \text{カ} \geq 0 \text{ となり，}$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x) dx \geq \left\{ \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right\}^2$$

が証明できる。ただし，ウ，エ，オ，カ は， m を用いて表わせ。

Ⅱ xy 平面上に 2 つの図形

円 $O: x^2 + (y - 1)^2 = r^2$ ($r > 0$) と放物線 $C: y = ax^2$ ($a > 0$) がある。

〔1〕 円 O と放物線 C の共有点が 1 個になる条件は、 $r = \boxed{\text{キ}}$,

$\boxed{\text{ク}} < a \leq \boxed{\text{ケ}}$ である。

〔2〕 円 O と放物線 C の共有点が 3 個になる条件は、 $r = \boxed{\text{コ}}$, $a > \boxed{\text{サ}}$
である。

〔3〕 〔2〕 の共有点を P, Q, R とし、三角形 PQR の面積を S とすると、 a を
用いて $S = \boxed{\text{シ}}$ となる。

Ⅲ 各々 $0, 1, 2, \dots, n, n+1$ と記された計 $n+2$ 枚 ($n \geq 1$) の札がある。

この中から同時に 3 枚の札を無作為に抜き出したとき、2 番目に大きい数を X とする。

〔1〕 $X = k$ となる確率 P_k を求めよ。

〔2〕 $\sum_{k=1}^n P_k$ を求めよ。

〔3〕 X の期待値 $E(X)$ を求めよ。