

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲの設問について解答せよ。ただし，Ⅰ，Ⅱについては問題文中の にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入せよ。

Ⅰ 白玉4個と黒玉6個の入っている袋から，玉を3個取り出すとき，次のそれぞれの場合について，取り出した白玉の数が黒玉より多い確率を求めよ。

〔1〕 毎回1個を取り出し，取り出した玉を袋に戻す場合。

白玉を取り出す確率は，常に ア であるから，求める確率は イ となる。

〔2〕 毎回1個を取り出し，取り出した玉を袋に戻さない場合。

3個とも白玉を取り出す場合の確率は ウ であるから，求める確率は エ となる。

〔3〕 毎回1個を取り出し，取り出した玉が黒なら袋に戻し，白なら戻さない場合。

白・黒・白の順で取り出すときの確率は オ であるから，求める確率は カ となる。

II $a > 0, b > 1$ とし、以下 xy 平面上で考える。

2つの集合を $A = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$, $B = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq b - ax^2\}$

とし、 A, B それぞれの存在する領域の面積を $S(A), S(B)$ と定義する。

$S(A) = S(B)$ であるとき、集合 A , 集合 B の和集合 $A \cup B$ の存在する領域の面積 $S(A \cup B)$ を以下の手順で求めることにする。このとき、以下の問いに答えよ。

[1] $S(A)$ を求めると $\boxed{\text{キ}}$ で、 $S(A) = S(B)$ であるから a を b で表すと、
 $a = \boxed{\text{ク}}$ となる。

[2] 放物線 $y = 1 - x^2$ と $y = b - ax^2$ の交点の x 座標を b のみを用いて表すと、 $x = \pm \boxed{\text{ケ}}$ となり、このうち $x > 0$ のものを α とする。 $S(A \cup B)$ は α, b を用いて表すと、

$S(A \cup B) = \boxed{\text{コ}} \alpha^3 + \boxed{\text{サ}} \alpha + \boxed{\text{シ}}$ となる。さらに、 b のみで

表すと $S(A \cup B) = \boxed{\text{ス}} \left(\frac{b-1}{\sqrt{b^2+b+1}} + 1 \right)$ となる。

Ⅲ $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ において a を定数として、 $y = 8\sin^3 \theta - 3\sqrt{3} \cos 2\theta + a$ なる関数を考える。

〔1〕 $x = \sin \theta$ とし、 $y = f(x)$ とするとき、関数 $f(x)$ を求めよ。

〔2〕 最大値 M を与える θ_1 と最小値 m を与える θ_2 を求めよ。

〔3〕 $y = 0$ となる異なる θ が3つ存在するとき、定数 a の範囲を求めよ。