

I

[1]

ア. $3\log_2\alpha + 2\log_2\beta$

イ. $\frac{1}{2}\log_2\alpha - \frac{2}{3}\log_2\beta$

ウ. 4

エ. $\frac{1}{8}$

[2]

オ. 8

[3]

カ. 2

キ. 9

II

$$\text{ク. } 1 \qquad \text{ケ. } -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \text{コ. } -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{サ. } \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \text{シ. } \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \text{ス. } 2$$

$$\text{セ. } 0 \qquad \text{ソ. } -2 \qquad \text{タ. } \frac{3}{10}$$

$$\text{チ. } \frac{3}{5} \qquad \text{ツ. } \frac{1}{10} \qquad \text{テ. } \frac{2}{5}$$

※ク～シは順不同

Ⅲ

(1)

$$y = \frac{1}{4}x^2 + px + q \cdots \textcircled{1}$$

$$y = kx \cdots \textcircled{2}$$

$$y = -\frac{1}{k}x \cdots \textcircled{3}$$

①と②が接することから①-②の式

$$\frac{1}{4}x^2 + (p-k)x + q = 0 \cdots \textcircled{4}$$

について、判別式が0になるので

$$D = (p-k)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot q = 0$$

$$\iff (p-k)^2 - q = 0 \cdots \textcircled{5}$$

①と③が接することから①-③の式

$$\frac{1}{4}x^2 + \left(p + \frac{1}{k}\right)x + q = 0 \cdots \textcircled{6}$$

について、判別式が0になるので

$$D = \left(p + \frac{1}{k}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot q = 0$$

$$\iff \left(p + \frac{1}{k}\right)^2 - q = 0 \cdots \textcircled{7}$$

⑤-⑦より

$$(p-k)^2 - \left(p + \frac{1}{k}\right)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \iff 2\left(k + \frac{1}{k}\right)p &= k^2 - \frac{1}{k^2} \\ &= \left(k + \frac{1}{k}\right)\left(k - \frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

$$k + \frac{1}{k} > 0 \quad (\because k > 0) \text{ より, } 2p = k - \frac{1}{k}$$

$$\therefore p = \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right) \cdots (\text{答})$$

⑤に代入して

$$\begin{aligned} q &= \left\{ \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right) - k \right\}^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

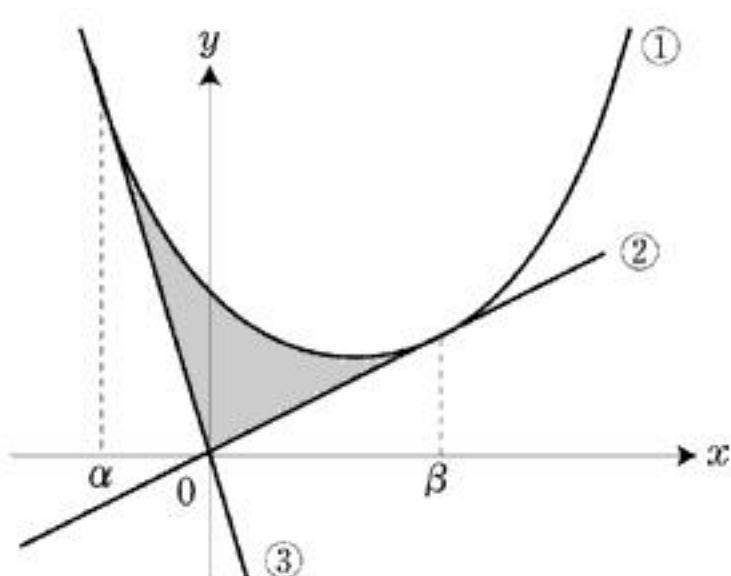
(2)

①と②の接点の x 座標を β とすると、④より

$$\beta = -\frac{\frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right) - k}{2 \cdot \frac{1}{4}} = k + \frac{1}{k} \cdots \textcircled{8}$$

①と③の接点の x 座標を α とすると、⑥より

$$\alpha = -\frac{\frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -\left(k + \frac{1}{k}\right) \cdots \textcircled{9}$$



求めるべき面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^0 \left\{ \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right)x + \frac{1}{4}\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 - \left(-\frac{1}{k}x\right) \right\} dx \\ &\quad + \int_0^{\beta} \left\{ \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right)x + \frac{1}{4}\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 - kx \right\} dx \\ &= \int_{\alpha}^0 \frac{1}{4}(x-\alpha)^2 dx + \int_0^{\beta} \frac{1}{4}(x-\beta)^2 dx \quad (\because \textcircled{8}, \textcircled{9}) \\ &= \left[\frac{1}{12}(x-\alpha)^3 \right]_{\alpha}^0 + \left[\frac{1}{12}(x-\beta)^3 \right]_0^{\beta} \\ &= \frac{1}{12}(-\alpha)^3 + \frac{1}{12}\beta^3 \\ &= \frac{1}{6}\left(k + \frac{1}{k}\right)^3 \cdots (\text{答}) \quad (\because \textcircled{8}, \textcircled{9}) \end{aligned}$$

(3)

$$k > 0 \text{ より, 相加・相乗平均の関係から } k + \frac{1}{k} \geq 2\sqrt{k \cdot \frac{1}{k}} = 2$$

等号成立は $k = \frac{1}{k}$ のとき。 $k > 0$ より $k = 1$ のときである。

$$k + \frac{1}{k} = t \text{ とおくと } S = \frac{1}{6}t^3 \text{ は } t > 0 \text{ の範囲で } S' = \frac{1}{2}t^2 > 0 \text{ より}$$

単調増加である。したがって S は t が最小のとき、つまり $k = 1$ のとき最小値をとるので、求めるべき最小値は

$$\frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{1}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdots (\text{答})$$