

I [1] 7 ... 8

[2] 1 ... 3 2

7 ... 3 2

1 ... 4

1 ... 8

[3] 1 ... $\frac{5}{6}$

$$\text{II} \quad [1] \quad \text{キ} \cdots \alpha + \beta$$

$$\text{ク} \cdots \alpha \beta$$

$$[2] \quad \text{ケ} \cdots \alpha + \beta$$

$$\text{コ} \cdots \frac{(\alpha + \beta)^2}{4}$$

$$\text{サ} \cdots \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\text{ゾ} \cdots \frac{(\alpha + \beta)^2}{4}$$

$$[3] \quad \text{ス} \cdots -1$$

$$\text{セ} \cdots 1$$

$$\text{ソ} \cdots 1$$

$$\text{タ} \cdots 1$$

$$\text{チ} \cdots -\frac{1}{2}$$

$$\text{リ} \cdots \frac{1}{4}$$

$$\text{テ} \cdots \frac{3}{2}$$

$$\text{ト} \cdots \frac{9}{4}$$

$$\text{ナ} \cdots -\frac{3}{2}$$

$$\text{ニ} \cdots \frac{9}{4}$$

$$\text{ヌ} \cdots \frac{5}{2}$$

$$\text{ネ} \cdots \frac{25}{4}$$

Ⅲ[1] $\triangle OAB$ の面積を S とおくと、

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{OA}|^2 |\vec{OB}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2} \dots\dots (A)$$

となる。ここで、

$$\vec{AB} \cdot \vec{AO} = a$$

$$\Leftrightarrow (\vec{OB} - \vec{OA}) \cdot (-\vec{OA}) = a$$

$$\Leftrightarrow |\vec{OA}|^2 - \vec{OA} \cdot \vec{OB} = a$$

$$\therefore |\vec{OA}|^2 = a + c \dots\dots (1)$$

$$\text{同様にして } |\vec{OB}|^2 = b + c \dots\dots (2)$$

これらを (A) に代入し、

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{(a+c)(b+c) - c^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{ab + bc + ca} \dots\dots (\text{答})$$

[2] $\vec{OP} = s \vec{OA} + (1-s) \vec{OB}$ (s は実数) とおく。

$|\vec{OP}|$ が最小 $\vec{OP} \perp \vec{AB}$ となるので、

$$\vec{OP} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \{s \cdot \vec{OA} + (1-s) \vec{OB}\} \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2s-1) \vec{OA} \cdot \vec{OB} - s |\vec{OA}|^2 + (1-s) |\vec{OB}|^2 = 0$$

(1), (2) 及び $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = c$ を代入して、

$$(2s-1)c - s(a+c) + (1-s)(b+c) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)s = b$$

$$\therefore \because a+b = \vec{AB} \cdot \vec{AO} + \vec{BA} \cdot \vec{BO} = |\vec{AB}|^2 \neq 0 \text{ より}$$

$$s = \frac{b}{a+b}$$

$$\therefore \vec{OP} = \frac{b}{a+b} \vec{OA} + \frac{a}{a+b} \vec{OB} \dots\dots (\text{答})$$

[3] $|\vec{OP}|$ が最小値をとるとする。 $\vec{OP} \perp \vec{AB}$ より

$$S = \frac{1}{2} |\vec{OP}| |\vec{AB}|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{ab + bc + ca} \quad ([1] \text{ の答 })$$

これと、[2] の途中で出てきた $a+b = |\vec{AB}|^2$ を用いて、

$$|\vec{OP}| = \frac{\sqrt{ab + bc + ca}}{|\vec{AB}|}$$

$$= \sqrt{\frac{ab + bc + ca}{a+b}} \dots\dots (\text{答})$$