

(第 3 時限：100分)

2005年度 ⑤

数 学 問 題

(理 系 必 須)

(全 4 ページ)

指 示 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙・下書用紙は，この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後，問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを，
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ xy 平面で点 $(-1, 1)$ にロープの片端を固定し，原点 $(0, 0)$ にある荷物
にロープをたるみのないように取り付け，点 $(1, 1)$ にある定滑車にロープをか
けたのち，点 $(1, 0)$ にある巻き取り用のモータにロープのもう一方の端を固定
した。時刻 $t = 0$ にモータを始動し，単位時間当たり一定の長さ $a > 0$ の割合で
ロープを巻き取り始めた。重力は y 軸の負の方向に働いているとする。荷物はす
べて移動しないようにロープに固定されており，それぞれの大きさや太さは無視
できるものとし，ロープにたるみや伸び縮みはないものとする。モータはロープが
張って巻き取れなくなったときに自動的に停止する。

〔1〕 荷物の停止点の座標は ア であり，停止した時刻は イ である。
巻き取り中の時刻 t における荷物の x 座標は ウ であり，そのときの荷
物の x 軸方向の速度は エ である。

〔2〕 今度は一旦元の状態に戻し，点 $(-1, 1)$ では，ロープを固定する代わり
に単位時間当たり一定の長さ $b > 0$ の割合でロープを巻き取るモータに接続
し，2つのモータで時刻 $t = 0$ から同時に巻き取り始めた。巻き取り中の時
刻 t における荷物の x 座標は オ であり，そのときの荷物の x 軸方向
の速度は カ である。

II

〔1〕 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \boxed{\text{キ}}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx = \boxed{\text{ク}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \boxed{\text{ケ}}$$

〔2〕 連続関数 $g(x)$ が与えられたとき,

$$f(x) = g(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-t) f(t) \, dt \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよう。

$$a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x \, dx, \quad b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x \, dx,$$

$$c = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) \cos x \, dx, \quad d = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) \sin x \, dx$$

とおく。このとき、式①は a, b を用いて

$$f(x) = g(x) + \boxed{\text{コ}} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

と書ける。この両辺に $\cos x$ を掛けて積分することにより、 a, b の関係式

$$\boxed{\text{カ}} = c$$

が得られ、また両辺に $\sin x$ を掛けて積分することにより a, b のもう一つ
の関係式

$$\boxed{\text{キ}} = d$$

が得られる。これらから a, b を計算すれば、式②によって $f(x)$ を求める
ことができる。

〔3〕 例えば、 $g(x) = x$ の場合は、 c, d を計算すれば $c = \boxed{\text{ス}}$, $d = \boxed{\text{セ}}$
となる。したがって、この場合は $a = \boxed{\text{ソ}}$, $b = \boxed{\text{タ}}$ となる。

Ⅲ 複素数平面上の任意の点 z は、実数 x, y と虚数単位 i を用いて、 $z = x + iy$ の形に表される。

〔1〕 複素数平面において、等式 $x + iy = (1 - i)x + i2\sqrt{2}$ を満たす点 $z = x + iy$ 全体が描く図形を A 、等式 $|z - 2\sqrt{2}(1 + i)| = 4$ を満たす点 z 全体が描く図形を B とする。図形 A 上の点 $z = x + iy$ については、 x と y は虚数を含まない等式 $y = \boxed{\text{チ}}$ を満たし、 B 上の点 $z = x + iy$ については、 x と y は虚数を含まない等式 $\boxed{\text{ツ}}$ を満たす。

〔2〕 z が A 上を動くとき、

$$w = (\cos 45^\circ - i \sin 45^\circ) z$$

が描く図形を A' とすると、 A' 上の点 w の実部は定数 $\boxed{\text{テ}}$ である。また、 z が B 上を動くとき w が描く図形を B' とすると、 B' は w に関する等式 $\boxed{\text{ト}}$ で表される。

〔3〕 図形 A' と B' の交点を求めると、そのうち虚部が正のものは $\boxed{\text{ナ}}$ である。一方、図形 A, B を原点のまわりに 15° だけ回転させて得られる図形をそれぞれ A'', B'' とすると、 A'' と B'' の交点のうち実部が負のものは $\boxed{\text{ニ}}$ である。(ただし、 $\boxed{\text{ナ}}$ 、 $\boxed{\text{ニ}}$ は複素数である。)

IV

- 〔1〕 座標平面における直線 $y = mx$ のベクトル方程式を $\vec{p} = t\vec{e}$ とする。このとき、 $\vec{e}$ を、その x 成分が正で、かつ $|\vec{e}| = 1$ となるようにとれば、 $\vec{e} = \boxed{\text{ヌ}}$ である。また、平面上の点 $U(u, v)$ からこの直線へ下ろした垂線の足を H とし、座標平面の原点を O とすると、 u, v, m を用いて

$$\overrightarrow{OH} = \boxed{\text{ネ}} \vec{e}$$

と表される。

- 〔2〕 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ があり、 $b > 0$ とする。 $A^2 = A$ が成立するための必要十分条件は c, d が a, b に関する式としてそれぞれ $c = \boxed{\text{ノ}}$, $d = \boxed{\text{ハ}}$ と表されることである。

さて、この条件が満たされているとき、平面上の任意の点 $U(u, v)$ に対して

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

とおくと、点 $P(x, y)$ は常にある直線 $y = mx$ 上にあつて、 m は a と b を用いて $m = \boxed{\text{ヒ}}$ と表される。任意の点 $U(u, v)$ に対して、 $U(u, v)$ からこの直線に下ろした垂線の足が $P(x, y)$ であるための条件は、 a が不等式 $\boxed{\text{フ}}$ を満たし、かつ、行列 A が a を用いて $A = \boxed{\text{ヘ}}$ と表されることである。