

3 時限：100分)

2005年度 ②

数 学 問 題

(理 系 必 須)

(全 4 ページ)

指 示 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙・下書用紙は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを、
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ

〔1〕 t を実数とする。整式 $f(x)$ を $(x-t)^2$ で割った余りは

ア $f'(t) + f(t)$ である。よって、方程式 $f(x) = 0$ の解 t がこの方程式の重解であるための必要十分条件は、 $f'(t) =$ イ である。ただし、 t が $f(x) = 0$ の重解であるとは、 $f(x)$ が $(x-t)^2$ で割り切れることである。

〔2〕 a, b を実数として、4次式 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6a^2x^2 + 12a^2x + b$ について考える。 $f(x) = 0$ が実数の重解を持つのは b が a を用いて $b =$ ウ ,
または $b =$ エ , または $b =$ オ と表される3つの場合である。重解が2つあるのは、条件 $a > 0, a \neq 1$ のもとでは $a =$ カ ,
 $b =$ キ のときで、その2つの重解は ク と ケ である。

Ⅱ $f(x), g(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で定義された実数値関数で、 $f(0)^2 + g(0)^2 > 0$ とする。また、任意の実数 x, y に対して、次の等式①、②を満たしているものとする。

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y) \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

$$g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

〔1〕 $f(0)$ と $g(0)$ を求め、その計算過程も含めて コ に記入せよ。

〔2〕 等式①、②より、 $y \neq 0$ に対して

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \text{サ} f(x) - \text{シ} g(x)$$

$$\frac{g(x+y) - g(x)}{y} = \text{シ} f(x) + \text{サ} g(x)$$

である。ただし、サ、シ は y の関数である。したがって、もし、 $f(x), g(x)$ が $x=0$ で微分可能で $f'(0)=2, g'(0)=1$ であるならば、 $f(x), g(x)$ はすべての x で微分可能で、

$$f'(x) = \text{ス}$$

$$g'(x) = \text{セ}$$

という関係式が成り立つ。このとき、 $F(x) = \log \{f(x)^2 + g(x)^2\}$ とおくと、その導関数は定数で $F'(x) = \text{ソ}$ となる。このことと〔1〕の結果より $F(x) = \text{タ}$ となるので、 $f(x)^2 + g(x)^2 = \text{チ}$ となることがわかる。

Ⅲ xy 平面において、放物線 $y = x^2 - 1$ の一つの接線を $l_1: y = kx + a$ とする。
放物線 $y = -(x - 4)^2$ の接線で、 l_1 に平行なものを $l_2: y = kx + b$ とする。
ただし、 $k > 0$ とする。

〔1〕 このとき、 a, b は k を用いて $a =$, $b =$ と表される。

〔2〕 $a > b$ となるための k の範囲は である。このとき、接線 l_1 上の
任意の点と接線 l_2 との距離 d は k を用いて $d =$ と表される。こ
れより、 d が最大となるのは $k =$ のときで、最大値は であ
る。

IV 等式

$$(a+b)^N = \sum_{k=0}^N {}_N C_k a^k b^{N-k}, \quad {}_N C_k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

を二項定理という。これを利用して以下の設問に答えよ。

表の出やすい銅貨を N 回投げる。そのうち、表が偶数回（0 回を含む）出る確率を P_e とし、表が奇数回出る確率を P_o とし、 P_e と P_o の大小関係を調べたい。

まず、奇数の $N = 2m + 1$ について調べてみる。1 回投げて表が出る確率を p とすれば、 N 回のうちで表が k 回出る確率は ${}_N C_k$ であるから、

$$P_e = \sum_{k=0}^m \text{ }, \quad P_o = \sum_{k=0}^m \text{ }$$

となる。ここで二項定理を応用すれば $P_e - P_o =$ となるが、題意より $p > \frac{1}{2}$ であるから P_e と P_o の大小関係は P_e P_o となる。

一方、 N が偶数のとき、上の結果 $P_e - P_o =$ はそのまま成立するので P_e と P_o の大小関係は P_e P_o である。