

(第3時限：100分)

2006年度 ⑤

数 学 問 題

(理 系 必 須)

(全7ページ)

指 示 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙・下書用紙は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを，
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ

- 〔1〕 関数 $f(x) = x^2 e^{-x}$ の導関数は $f'(x) =$ ア ，第2次導関数は
 $f''(x) =$ イ である。 $f(x)$ は $x =$ ウ のとき極大値 エ をと
り， $x =$ オ のとき極小値 カ をとる。なお $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ である。

- 〔2〕 k を定数とするととき， $e^x = kx^2$ の解の個数を調べると，

解が3個となるときの k に関する条件は キ ，
解が2個となるときの k に関する条件は ク ，
解が1個となるときの k に関する条件は ケ ，
解が0個となるときの k に関する条件は コ

である。

(このページは空白)

II x, y, z を座標とする空間において、同一直線上にない3点

$$A(0, -1, 1), B(2, 1, -1), C(2, -2, 1)$$

を通る平面を α で表す。ベクトル $\vec{n} = (1, a, b)$ が平面 α に垂直であるとする、 $\vec{n}$ が $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ と垂直であることから、 a, b は

$$a = \boxed{\text{サ}}, \quad b = \boxed{\text{シ}}$$

と定まる。点 $X(x, y, z)$ が平面 α 上にあることは、 $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}$ (ただし、 O は原点) と $\vec{n}$ が垂直であることと同値なので、この条件は

$$x + \boxed{\text{サ}}y + \boxed{\text{シ}}z = \boxed{\text{ス}}$$

と表現される。

今、平面 α の上にない点 $P(-1, 2, 4)$ をとり、平面 α に関して P と対称な位置にある点を Q とすれば、 $\overrightarrow{PQ}$ は $\vec{n}$ の実数倍、すなわち $s\vec{n}$ (s は実数) と表されるが、この s は線分 PQ の中点が平面 α 上にあることから $s = \boxed{\text{セ}}$ と決まり、 Q の座標も、

$$Q(\boxed{\text{ソ}}, \boxed{\text{タ}}, \boxed{\text{チ}})$$

と決定される。

次に xz 平面と平行な平面 $y = \frac{1}{2}$ を α' で表し、平面 α' に関して Q と対称な位置にある点を R とすると、その座標は

$$R(\boxed{\text{ソ}}, \boxed{\text{ツ}}, \boxed{\text{チ}})$$

と定まる。点 P, Q, R は同一直線上にないので、これらを通る平面はただ1つある。これを α'' で表す。点 (x, y, z) が平面 α'' 上にある条件は

$$\boxed{\text{テ}}x + z = \boxed{\text{ト}}$$

と表され、3つの平面 $\alpha, \alpha', \alpha''$ の共有点 O' の座標は

$$O' \left(\boxed{\text{ナ}}, \frac{1}{2}, \boxed{\text{ニ}} \right)$$

と定まる。P, Q, R はすべて O' から等距離にあり, この距離 d は

$$d = \boxed{\text{ヌ}}$$

と計算される。

Ⅲ 行列 P, Q, E を

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。ここで、 a, b, c, d, e, f は正の実数、また、 $s = a + b + c$ とする。

(ただし、以下の に記入するときは s, a, b, c の式、または実数を用いよ。)

〔1〕 条件 A: $PQP = P$

が成り立つとき、 $d + e + f =$ ネ である。このとき行列 PQ を s のみの式で表すと $PQ =$ ノ となる。

〔2〕 条件 A に加えて、条件 B: $QPQ = Q$

が成り立つとき、 $d =$ ハ , $e =$ ヒ , $f =$ フ となる。

〔3〕 P, Q が条件 A, 条件 B を満たすとする。

列ベクトル $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して、内積 $(Q\vec{u}) \cdot (Q\vec{u})$ が最小になるのは、 $a,$

b, c の間に条件 C: ヘ が成り立つときであり、最小値は ホ である。

ただし、列ベクトルの内積を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

のように定義する。

〔4〕 P, Q が条件 A, 条件 B を満たすとする。

列ベクトル $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ に対して, 内積 $\{(PQ - E)\vec{v}\} \cdot \{(PQ - E)\vec{v}\}$

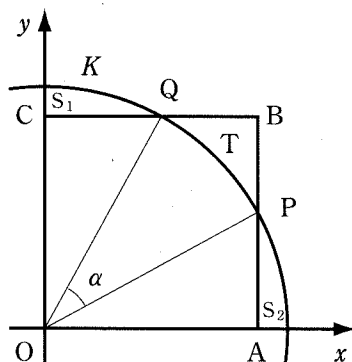
が最小になるのは, s に対して条件 D: マ が成り立つときであり, 最小値は ミ である。

〔5〕 条件 A, B, C, D がすべて成り立つとき,

$$a = \text{ム}, b = \text{メ}, c = \text{モ}$$

である。

IV 図のような、一辺の長さが $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 以上 1 以下の正方形 OABC と、原点を中心とする半径 1 の円 K とを考える。円 K と辺 AB との交点を P、円 K と辺 BC との交点を Q とする。ただし、正方形の一辺の長さが $\frac{1}{\sqrt{2}}$ のときは、 $P = Q$ とする。 $\angle POQ = \alpha \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right)$ とおくとき、正方形の一辺の長さは ヤ である。



第 1 象限上で円 K の内部にあって正方形 OABC の外部にある点のなす図形 S_1 と S_2 の面積の和 $f(\alpha)$ は ユ となる。また、正方形 OABC の内部にあって円 K の外部にある点のなす図形 T の面積 $g(\alpha)$ は ヨ となる。

$f(\alpha) = 2g(\alpha)$ となる α の近似値は以下のようにして求められる。図形の意味から、 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ において $f(\alpha)$ は単調に ラ し、 $g(\alpha)$ は単調に リ するので、 $h(\alpha) = f(\alpha) - 2g(\alpha)$ は単調に ル する。 $h(0) = \text{レ}$ 、 $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{ロ}$ より、 $f(\alpha) = 2g(\alpha)$ を満たす α が $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ の範囲にただひとつ存在する。この α は以下の数表より ワ を左端とする幅 0.1 の区間の中にあることがわかる。なお、円周率は 3.141... である。

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
0.0	0.000	1.000
0.1	0.099	0.995
0.2	0.198	0.980
0.3	0.295	0.955
0.4	0.389	0.921
0.5	0.479	0.877

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
0.6	0.564	0.825
0.7	0.644	0.764
0.8	0.717	0.696
0.9	0.783	0.621
1.0	0.841	0.540
1.1	0.891	0.453

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
1.2	0.932	0.362
1.3	0.963	0.267
1.4	0.985	0.169
1.5	0.997	0.070
1.6	0.999	-0.030
1.7	0.991	-0.129

(小数点第 4 位以下を切り捨て)