

(第3時限：100分)

2006年度 ⑦

数 学 問 題

(理 系 必 須)

(全6ページ)

指 示 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙・下書用紙は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを、
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ 実数 k に対して直線

$$L: y = kx + 1$$

を考える。 L は k によらない定点 P_0 (ア , イ) を通る。 P_0 と双曲線

$$H: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$$

上の点 (x, y) との距離が最小になるのは $(x, y) = ($ ウ , エ) ま
たは (オ , カ) となるときであり、そのときの距離は キ であ
る。直線 L が双曲線 H に接するための k に対する条件は ク であり、直
線 L が双曲線 H に接しないが、共有点を1個のみ持つための条件は ケ で
ある。また直線 L と双曲線 H とが相異なる2つの共有点を持つための条件は
 コ である。 コ が成り立っているとき、これら2つの共有点を結ぶ線分
の中点の座標は (サ , シ) である。この中点は、 k が コ によ
って定義される範囲を動くとき、方程式 ス によって定義される曲線の上を
動く。この中点が P_0 と一致するのは $k =$ セ のときである。

II

- [1] ω は $\omega^3 = 1$ を満たす虚部が正の複素数とする。実数 a, b に対して、
 $a\omega + \frac{b}{\omega}$ は係数が実数の 2 次方程式

$$x^2 + \boxed{\text{ソ}} x + \boxed{\text{タ}} = 0$$

の解である。ただし、 $\boxed{\text{ソ}}$ 、 $\boxed{\text{タ}}$ は a, b の多項式である。 $a\omega + \frac{b}{\omega}$ が実数となるのは $\boxed{\text{チ}}$ のときに限る。

- [2] p, q を実数とする。3 次方程式

$$x^3 - 3px - q = 0$$

が実数でない解をもつとする。この解の 1 つは、 $a > b$ である実数 a, b と上記の ω を用いて $a\omega + \frac{b}{\omega}$ と書ける。このとき、残りの 2 つの解は、 a, b

の式で表すと、 $\boxed{\text{ツ}} \omega + \frac{\boxed{\text{テ}}}{\omega}$ と $\boxed{\text{ト}}$ である。また $p = \boxed{\text{ナ}}$ 、
 $q = \boxed{\text{ニ}}$ である。これより、 a^3, b^3 を p, q の式で求めると、

$$a^3 = \boxed{\text{ヌ}}, b^3 = \boxed{\text{ネ}}$$

となる。従って、この 3 次方程式が実数でない解をもつための p, q の条件は $\boxed{\text{ノ}}$ である。

Ⅲ x, y を座標とする座標平面上で、次の方程式によって定義される楕円 E と双曲線 H を考える。

$$E: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = \frac{1}{16}$$

$$H: \frac{x^2}{3} - y^2 = \frac{1}{4}$$

E と H は交わり、 H は E の内部を3つの領域に分けるが、このうち原点 $O(0, 0)$ を含む領域の面積 S を求めよう。

E と H の交点のうち、第1象限にあるものを P とすれば、 P の座標は $(\boxed{\text{ハ}}, \boxed{\text{ヒ}})$ となる。 x 軸に関して P と対称の位置にある点を Q とし、 P から Q に至る双曲線 H の弧と線分 PQ によって囲まれた領域の面積を V とすれば、 V は、

$$V = 2 \int_{\boxed{\text{フ}}}^{\boxed{\text{ハ}}} \sqrt{\frac{x^2}{3} - \frac{1}{4}} dx$$

と表される。この積分の計算のため新しい変数 t (ただし $t \geq 1$) を

$$x = \frac{\sqrt{3}(t^2 + 1)}{4t}$$

により導入すれば、 $\frac{dx}{dt} = \boxed{\text{ヘ}}$ となり、

$$V = \frac{\sqrt{3}}{8} \int_{\boxed{\text{ホ}}}^{\boxed{\text{マ}}} \left(\boxed{\text{ミ}} \right) dt = \boxed{\text{ム}}$$

と計算される。

次に楕円 E の内部のうち、 y 軸とそれに平行な直線 $x = \boxed{\text{ハ}}$ によってはさまれた部分の面積を U とすると

$$U = 6 \int_0^{\boxed{\text{ハ}}} \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{x^2}{25}} dx = \boxed{\text{メ}}$$

と計算される。従って、求める面積 S は

$$S = 2(U - V) = \boxed{\text{モ}}$$

となる。

Ⅳ 座標平面上に、図のような道路①～⑭の組み合わせによる道路網がある。 x 軸に平行な道路の長さは5、 y 軸に平行な道路の長さは3である。各々の道路は矢印の方向に一方通行で、逆方向に移動することはできない。

この道路網の上で、点 $O(0, 0)$ から点 $A(15, 9)$ まで移動する経路の数は全部で 通りである。このうち、道路⑤を通る経路は 通り、道路⑥を通る経路は 通りである。

点 O から点 A に移動する人は、出発点および途中の交差点で2方向の道路に進入できる場合には、その点からみた点 A の方向に対する角度がより小さい方の道路に確率 $\frac{2}{3}$ で、角度がより大きい方の道路に確率 $\frac{1}{3}$ で進入するものとする。たとえば、交差点 $(10, 3)$ では、道路⑦に確率 $\frac{2}{3}$ で、道路⑧に確率 $\frac{1}{3}$ で進入する。

点 O から点 A に移動する人の数が729人であるとする。このとき、点 O から点 A まで、

経路：① → ⑤ → ⑨ → ⑫ → ⑬ → ⑭

で移動する人数の期待値は であり、

経路：① → ⑩ → ⑥ → ⑪ → ⑫ → ⑭

で移動する人数の期待値は である。また、道路⑤、⑥、⑦、⑧を通行する人数の期待値はそれぞれ道路⑤：, 道路⑥：, 道路⑦：, 道路⑧： である。

