

(第3時限：100分)

2007年度 ②

数 学 問 題

(理 系)

(全5ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙・下書用紙は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを、
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ 実数 a, b, c, k を定数として，曲線

$$F: y = k(x - a)(x - b)(x - c)$$

と3点 $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$ を考える。ただし， a, b, c は互いに異なり， k は0でないとする。

〔1〕 線分 AB の中点を通り x 軸に垂直な直線と曲線 F との交点 P の座標は $(\text{ア}, \text{イ})$ である。

〔2〕 点 P における曲線 F の接線 ℓ の傾きは ウ である。

〔3〕 接線 ℓ と x 軸との交点の座標は $(\text{エ}, 0)$ となる。

〔4〕 線分 BC の中点を通り x 軸に垂直な直線と曲線 F との交点を Q とし，点 Q における曲線 F の接線を ℓ' とする。接線 ℓ と ℓ' が平行であるための必要十分条件は a, b, c を用いて オ と表される。

II 空間の4点 O, A, B, C と実数 p (ただし $|p| < 1$) について,

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$$

かつ

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = p$$

が成立しているとする。

このとき, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = \boxed{\text{カ}}$ が成り立ち, $\triangle ABC$ は正三角形になる。点 G を $\triangle ABC$ の重心とすると, 点 O から点 G の距離は $|\overrightarrow{OG}| = \boxed{\text{キ}}$ と表される。

4点 O, A, B, C が同一平面上にあるための条件は $p = \boxed{\text{ク}}$ であり, これらの4点 O, A, B, C が四面体の頂点となりうるのは $\boxed{\text{ク}} < p < 1$ が満たされるとき, かつ, そのときに限る。この四面体 OABC の体積 V は $V = \boxed{\text{ケ}}$ と表されるから, V が最大となるのは $p = \boxed{\text{コ}}$ のときである。

ただし, $\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ケ}}$ には p の式を, $\boxed{\text{ク}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ には実数を入れよ。

Ⅲ 中心 O, 半径 1 の円 S を考える。図のように, S 上に互いに異なる 4 点 A, P, Q, B をとり, $\angle AOP = \alpha$, $\angle POQ = \beta$, $\angle QOB = \gamma$ とおく。点 P を含む弧 AQ 上に点 P_1 を $\triangle AP_1Q$ の面積が最大になるようにとり, $\angle AOP_1 = \alpha_1$ とおく。このとき, $\alpha_1 = \boxed{\text{サ}}$ となる。点 Q を含む弧 BP_1 上に点 Q_1 を $\triangle BP_1Q_1$ の面積が最大になるようにとり, $\angle BOQ_1 = \gamma_1$ とおく。このとき, $\gamma_1 = \boxed{\text{シ}}$ となる。さらに, 点 P_1 を含む弧 AQ_1 上に点 P_2 を $\triangle AP_2Q_1$ の面積が最大になるようにとり, $\angle AOP_2 = \alpha_2$ とおく。点 Q_1 を含む弧 BP_2 上に点 Q_2 を $\triangle BP_2Q_2$ の面積が最大になるようにとり, $\angle BOQ_2 = \gamma_2$ とおく。以下同様に, 点 $P_3, \dots, P_n, \dots$ と点 $Q_3, \dots, Q_n, \dots$ を交互にとっていき, $\angle AOP_n = \alpha_n$, $\angle BOQ_n = \gamma_n$ とおく。

このとき, α_{n+1} を α_n, γ_n を使って表すと, $\alpha_{n+1} = \boxed{\text{ス}}$ となる。同様に, γ_{n+1} は α_{n+1}, γ_n を用いて $\gamma_{n+1} = \boxed{\text{セ}}$ と表せる。これらを用いて,

$$\alpha_{n+1} - \gamma_{n+1} = \boxed{\text{ソ}} (\alpha_1 - \gamma_1) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となり, また,

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \boxed{\text{タ}} (\alpha_1 - \gamma_1) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となる。これより,

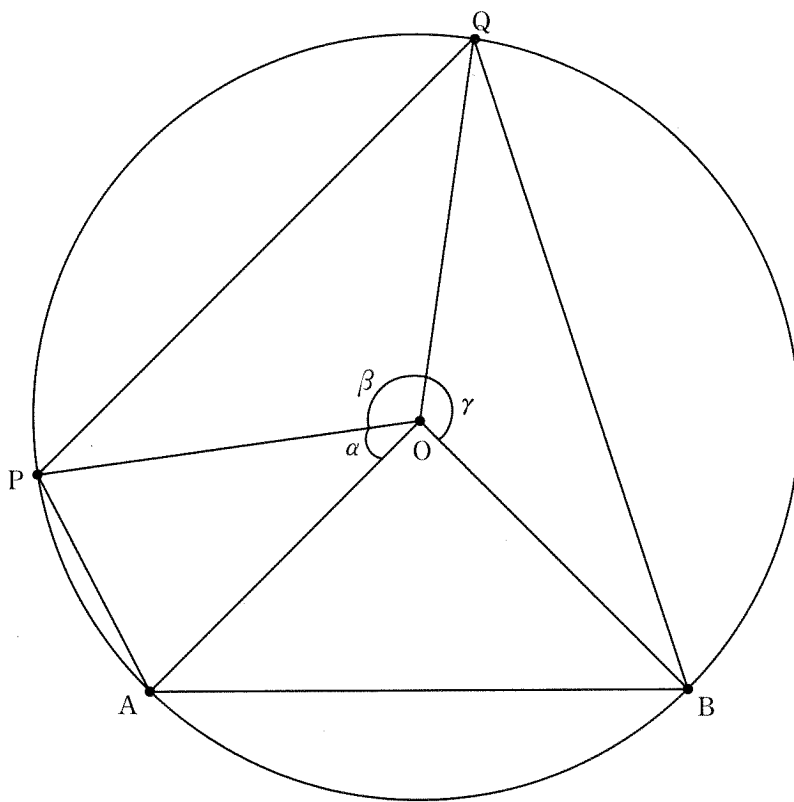
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \boxed{\text{チ}}$$

である。よって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \boxed{\text{ツ}}$$

となる。

ただし, $\boxed{\text{ソ}}$, $\boxed{\text{タ}}$ には n の式を, $\boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{シ}}$, $\boxed{\text{チ}}$, $\boxed{\text{ツ}}$ には α, β, γ の式を入れよ。



IV 0, 1, 2, ..., 9 と書いたカードがそれぞれ一枚ずつある。この 10 枚のカードから無作為に 1 枚を選び、その数を X とする。そのカードをもとに戻して、再び 10 枚のカードから無作為に 1 枚を選び、その数を Y とする。以下では、0 は 3 の倍数とする。

[1] 和 $X + Y$ の期待値は , 積 XY の期待値は である。

[2] 和 $X + Y$ が 3 の倍数となる確率は , 積 XY が 3 の倍数となる確率は である。

[3] 和 $X + Y$ が 3 の倍数のとき、積 XY が 3 の倍数となる確率は である。和 $X + Y$ が 3 の倍数でないとき、積 XY が 3 の倍数となる確率は である。