

(第3時限：100分)

2007年度 ③

数 学 問 題

(理 系)

(全4ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙・下書用紙は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを，
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ

〔1〕 a を 0 でない実数とし，

$$f(x) = e^{ax} \sin(ax)$$

$$g(x) = e^{ax} \cos(ax)$$

とおく。このとき，

$$\int_0^x f(t) dt = \text{ア} f(x) + \text{イ} g(x) + \text{ウ}$$

$$\int_0^x g(t) dt = \text{エ} f(x) + \text{オ} g(x) + \text{カ}$$

である。

ただし， ア ～ カ には a の式を入れよ。

〔2〕 曲線 $y = e^x$ ， x 軸， y 軸，直線 $x = \pi$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V とすると， $V = \text{キ}$ である。

また，曲線 $y = e^x \sin x$ ， x 軸， y 軸，直線 $x = \pi$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は， V の ク 倍である。

同様に，曲線 $y = e^x \cos x$ ， x 軸， y 軸，直線 $x = \pi$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は， V の ケ 倍である。

ただし， キ ～ ケ には実数を入れよ。

II

- [1] 実数係数の整式 $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ が実数 p, q, r を用いて,
 $f(x) = (x^2 + px + q)(x^2 - px + r)$ と因数分解できるとする。このとき,
 p, q, r を用いて $a = \boxed{\text{コ}}$, $b = \boxed{\text{サ}}$, $c = \boxed{\text{シ}}$ と表せる。こ
 れらより, p についての関係式

$$p^6 + \boxed{\text{ス}} p^4 + \boxed{\text{セ}} p^2 + \boxed{\text{ソ}} = 0 \cdots \text{①}$$

が導ける。

ただし, $\boxed{\text{ス}}$, $\boxed{\text{セ}}$, $\boxed{\text{ソ}}$ には a, b, c の式を入れよ。

- [2] 方程式 $x^4 + x^2 + 3x - \frac{5}{4} = 0 \cdots \text{②}$ を考えると, ①より $p^2 = \boxed{\text{タ}}$ が
 得られるから, 方程式②の解は $\boxed{\text{チ}}$, $\boxed{\text{ツ}}$, $\boxed{\text{テ}}$, $\boxed{\text{ト}}$ と
 なる。

Ⅲ a は $a > 1$ を満たす実数とする。このとき、座標平面上で直線 $x + y = 2a$ と双曲線 $y = \frac{1}{x}$ の交点を考え、それらのうち x 座標が y 座標より小さい方を点 A とすれば、点 A の座標は a を用いて、 $A \left(\boxed{\text{ナ}}, \boxed{\text{ニ}} \right)$ と表される。

次に、原点 O と双曲線上の点 $B(1, 1)$ を考え、点 A と点 B を結ぶ双曲線の弧と線分 OA , OB によって囲まれる図形の面積を T とおく。ここで、点 A , B から x 軸に下ろした垂線をそれぞれ AH_A , BH_B とすると、点 H_A の座標は $\left(\boxed{\text{ナ}}, 0 \right)$, 点 H_B の座標は $(1, 0)$ となる。

$\triangle OAH_A$ の面積 S_1 と $\triangle OBH_B$ の面積 S_2 を比較すると、 $S_1 - S_2 = \boxed{\text{ヌ}}$ が成り立つ。面積 T を a を用いて表すと、 $T = \boxed{\text{ネ}}$ となる。このとき、点 A の座標を T の関数として表すと、 $A \left(\boxed{\text{ノ}}, \boxed{\text{ハ}} \right)$ となる。

Ⅳ 図のように平面上で、原点 O を中点とする長さ 2ℓ の線分 AB が、原点 O のまわりを一定の速さで回転している。また、 y 軸上の点 G を中心とした半径 r の円 C で囲まれた領域 D を考える。ただし、領域 D は円 C を含まない。領域 D において連続した作業を行いたいのので、作業中は線分 AB が領域 D と共有点をもたないことが要求される。

線分 OG の長さを h とすると、 $h < \boxed{\text{ヒ}}$ の場合は線分 AB と領域 D は常に共有点をもち、 $h \geq \boxed{\text{フ}}$ のときは線分 AB と領域 D が共有点をもつことはない。よって、ここでは $\boxed{\text{ヒ}} \leq h < \boxed{\text{フ}}$ の場合を考える。このとき、線分 AB が円 C の接線となる時刻があるための h の条件は $\boxed{\text{ヘ}}$ である。

以下では、 $\ell = r$ とする。また、線分 AB は時刻 0 で y 軸に重なり、時間 t の間に角 at ラジアン回転するものとする。ここで、 $h = \sqrt{2}r$ としたとき、作業の開始時刻を適切に選べば、連続して作業できる時間 T は最大で $\boxed{\text{ホ}}$ まで許される。この作業の開始時刻は $\boxed{\text{マ}} + \boxed{\text{ミ}} n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) となる。また、 $h = \sqrt{3}r$ としたときは、同様の T の最大値は $\boxed{\text{ム}}$ となる。

