

(第3時限：100分)

2007年度 ⑤

数 学 問 題

(理 系)

(全6ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙・下書用紙は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを、
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ a, b を定数として、3次式 $f(x) = x^3 - 2x + a$ と2次式 $h(x) = x^2 + 2x + b$ の共通因数について調べる。

$$f(x) = q(x)h(x) + r(x)$$

を満たす多項式 $q(x) = \text{ア}$ ， $r(x) = \text{イ}$ がある。ただし、 $r(x)$ の次数は1以下とする。

〔1〕 どのような x の値に対しても $r(x)$ が定数となる条件は ウ である。
特に、 $r(x) = 0$ となる条件は ウ かつ エ である。

〔2〕 $r(x)$ が1次式のとき、2次式 $h(x)$ が $r(x)$ で割り切れるための条件は オ となる。この条件が成り立つとき、3次式 $f(x)$ も $r(x)$ で割り切れるので、1次式 $r(x)$ は $f(x)$ と $h(x)$ の共通因数となる。

〔3〕 $a = 1$ のとき、 $f(x)$ と $h(x)$ が1次式を共通因数としてもつための b についての条件は、3次方程式 カ で表され、これを解くと、 $b = \text{キ}$ ，
 ク ， ケ となる。

(このページは空白)

II

- [1] 3点 $O(0, 0, 0)$, $U(1, 0, -1)$, $V(0, 1, -2)$ を通る平面 Q 上の任意の点 $W(x, y, z)$ は、ベクトル $\overrightarrow{OU}$, $\overrightarrow{OV}$ を用いて

$$\overrightarrow{OW} = s \overrightarrow{OU} + t \overrightarrow{OV} \quad (s, t \text{ は実数})$$

と表せる。方程式 $z = 0$ で表される平面 P 上にあり、かつ平面 Q 上にない点 $A_0(a, b, 0)$ から、平面 Q へ垂線を下ろし、その交点を B_1 とすると、点 B_1 の座標は $\left(\boxed{\text{コ}}, \boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{シ}} \right)$ となる。

点 B_1 から平面 P へ垂線を下ろし、その交点を $A_1(x_1, y_1, 0)$ とすると、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ス}} & \boxed{\text{セ}} \\ \boxed{\text{ソ}} & \boxed{\text{タ}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

の関係式が成立する。

- [2] 点 A_1 から平面 Q へ垂線を下ろし、その交点を B_2 とし、点 B_2 から平面 P へ垂線を下ろし、その交点を A_2 とする。以下同様にして、平面 Q 上に点 $B_3, \dots, B_n, \dots$, 平面 P 上に点 $A_3, \dots, A_n, \dots$ を交互にとる。そして、点 A_n の座標を $(x_n, y_n, 0)$ とする。このとき、 (x_n, y_n) を x_{n-1}, y_{n-1} で表すと、

$$(x_n, y_n) = \left(\boxed{\text{チ}}, \boxed{\text{ツ}} \right)$$

となる。

- [3] x_n と y_n を a, b を用いて表すことを考えよう。

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{テ}} & \boxed{\text{ト}} \\ \boxed{\text{ナ}} & \boxed{\text{ニ}} \end{pmatrix}$$

であり,

$$T^{-1} \begin{pmatrix} \boxed{\text{ス}} & \boxed{\text{セ}} \\ \boxed{\text{ソ}} & \boxed{\text{タ}} \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ヌ}} & \boxed{\text{ネ}} \\ \boxed{\text{ノ}} & \boxed{\text{ハ}} \end{pmatrix}$$

となるから,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ヒ}} & \boxed{\text{フ}} \\ \boxed{\text{ヘ}} & \boxed{\text{ホ}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

を満たす。

〔4〕 また,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \boxed{\text{マ}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \boxed{\text{ミ}}$$

である。

Ⅲ 平面上に異なる3点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ がある。 $0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t に対し、点 $Q_1(t)$ は時刻 $t=0$ に点 P_1 を出発し、時刻 $t=1$ に点 P_2 に到着するように、線分 P_1P_2 上を一定の速度で運動する。同様に、点 $Q_2(t)$ は時刻 $t=0$ に点 P_2 を出発し、時刻 $t=1$ に点 P_3 に到着するように、線分 P_2P_3 上を一定の速度で運動する。さらに、線分 $Q_1(t)Q_2(t)$ を $t:(1-t)$ に内分するように動く点を $B(t)$ とする。ただし、 $t=0$ と $t=1$ のときには、 $B(0) = P_1$, $B(1) = P_3$ とみなす。

[1] 点 $Q_1(t)$ の座標は t と $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ を用いて、

$\left(\boxed{\text{ム}}, \boxed{\text{メ}} \right)$ と表される。

点 $Q_2(t)$ についても同じように求められるから、点 $B(t)$ の座標は t と x_1 ,

y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 を用いて

$\left(\boxed{\text{モ}}, \boxed{\text{ヤ}} \right)$ と表される。

[2] 時刻 $t = \frac{1}{2}$ における点 $B(t)$ の速度ベクトルは、 $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$

を用いて $\left(\boxed{\text{ユ}}, \boxed{\text{ヨ}} \right)$ と表される。

[3] 3点 P_1, P_2, P_3 を $P_1(-1, 0)$, $P_2(0, h)$, $P_3(1, 0)$ とする（ただし、 $h \neq 0$ ）。このとき、点 $B(t)$ の軌跡を表す方程式は、

$y = \boxed{\text{ラ}} x^2 + \boxed{\text{リ}} x + \boxed{\text{ル}}$ となる。

[4] $x_1 < x_2 < x_3$ かつ $h > 0$ として、3点 P_1, P_2, P_3 を $P_1(x_1, 0)$,

$P_2(x_2, h)$, $P_3(x_3, 0)$ とする。 t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲で変化するとき

$B(t)$ が描く曲線と x 軸に囲まれた部分の面積は、 x_1, x_2, x_3, h を用いて

$\boxed{\text{レ}}$ と表される。

Ⅳ 5個の文字 A, A, B, B, X を横一列に並べる。ただし、同じ文字どうしは区別しないものとする。

〔1〕 この並べ方は 通りある。

〔2〕 A と A が隣り合うような並べ方は 通りある。

〔3〕 A と A が隣り合い、かつ、B と B も隣り合うような並べ方は 通りある。

〔4〕 A と A が隣り合わず、かつ、B と B も隣り合わないような並べ方は 通りある。

〔5〕 X より右側と左側にそれぞれ1つずつ A があるような並べ方は 通りある。(例: AXBAB)