

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを、
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ $a > 0$ とする。関数

$$f(x) = axe^{-ax^2}$$

を微分すると、 $f'(x) =$ ア である。 $f(x)$ は $x =$ イ で極小値をとり、
極大値は ウ である。

$a =$ エ のとき、 $f(x) = a$ を満たす x は、ただ1つ存在する。

曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = x$ が原点以外の共有点をもつとき、 a の範囲は オ
である。このとき、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を S と
すると、

$$S =$$
 カ

であり $\lim_{a \rightarrow \infty} S =$ キ である。

Ⅱ 以下の $\boxed{\text{ク}}$ ～ $\boxed{\text{サ}}$ は t の式で答えよ。

〔1〕 $t = \sin \theta$ とすると

$$\cos 4\theta = \boxed{\text{ク}}, \sin 4\theta = \boxed{\text{ケ}} \cos \theta, \sin 5\theta = \boxed{\text{コ}}$$

である。

〔2〕 多項式 $\boxed{\text{コ}} - 1$ を因数分解すると

$$\boxed{\text{コ}} - 1 = (t - 1) \left(\boxed{\text{サ}} \right)^2$$

である。 $\theta = \frac{\pi}{10}$ のとき $\sin 5\theta = 1$ であるから、 $\sin \frac{\pi}{10} = \boxed{\text{シ}}$ である。

〔3〕 $\cos 4\theta = \sin \theta$ を満たす θ を求めよう。 $t = \sin \theta$ とおき、 $\boxed{\text{ク}} - t = 0$ を解いて $t = \boxed{\text{ス}}$ を得る。これより、 $0 < \theta < \pi$ の範囲で $\cos 4\theta = \sin \theta$ を満たす θ は、

$$\theta = \boxed{\text{セ}}$$

であることがわかる。

Ⅲ a を実数とする。 xy 平面において P, Q は放物線 $y = ax - x^2$ 上の異なる 2 点とする。点 P における放物線の接線と、点 Q における放物線の接線の交点を R とし、 $\triangle PQR$ の面積を S とする。

[1] P, Q の x 座標をそれぞれ p, q とする。 P における放物線の接線の方程式は $y = \boxed{\text{ソ}}$ であり、

$$R \text{ の座標は } \left(\boxed{\text{タ}}, \boxed{\text{チ}} \right), S = \boxed{\text{ツ}}$$

である。

[2] P, Q はともに原点と異なり、さらに P, Q における放物線の法線の交点が原点に一致するという。このとき a の範囲は $\boxed{\text{テ}}$ であり、 a を用いて

$$R \text{ の座標は } \left(\boxed{\text{ト}}, \boxed{\text{ナ}} \right), S = \boxed{\text{ニ}}$$

と表される。

IV N を3以上の自然数とする。長さ $2N$ のひもがあり、長さ1で等間隔に $2N + 1$ 個の目印がついている。ただし両端の2つの目印は黒色で、他の目印は白色とする。白色の目印から2つ選びこれを2頂点、両端の黒色の目印を重ね合わせてこれを3つ目の頂点とする三角形をつくりたい。(白色の目印の選び方によっては三角形ができないこともある。)

〔1〕 $N = 3$ のとき、2つの白色の目印の選び方は全部で 通りあり、このうち上に述べた方法で三角形ができるのは 通りである。

〔2〕 $N = 4$ のとき、2つの白色の目印の選び方は全部で 通りあり、これらが同様に確からしいとすると、三角形ができる確率は である。

〔3〕 $2N - 1$ 個の白色の目印に、順に $1, 2, \dots, 2N - 1$ と番号をつける。2つの白色の目印の選び方は全部で 通りあり、これらは同様に確からしいものとする。2つ選んだ白色の目印の番号の小さい方を X 、大きい方を Y とおく。三角形ができるとき、3辺の長さは

, ,

であり、三角形ができる確率は である。また $N \rightarrow \infty$ のとき、この確率は に収束する。

