

(第3時限：100分)

2009年度 ②

数 学 問 題

(理 系)

(全4ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ n を 0 以上の整数とし，不等式 $x + 2y \leq n$ を満たす 0 以上の整数の組 (x, y) の個数を $M(n)$ とする。

〔1〕 $M(1) = \text{ア}$ ， $M(2) = \text{イ}$ ， $M(3) = \text{ウ}$ である。

〔2〕 $M(n+1) - M(n)$ は $x + 2y = n+1$ を満たす 0 以上の整数の組 (x, y) の個数であるから，0 以上の整数 m について

$$M(2m+1) - M(2m) = \text{エ}，$$

$$M(2m+2) - M(2m+1) = \text{オ}$$

となる。これら 2 式より，

$$M(2m) = \text{カ}，$$

$$M(2m+1) = \text{キ}$$

である。

したがって，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M(n)}{n^2} = \text{ク}$$

となる。

(注： エ ， オ ， カ ， キ には m を用いた式を記せ。)

Ⅱ 点 O を原点とする座標平面上に、2 点 $A(a, b)$ と $B(c, d)$ をとり、ベクトル $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ によって定まる点を C とする。3 点 A, B, C は一直線上にないとする。また、正の数 p, q (ただし、 $p > q$ とする) に対して、行列 $\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$ で表される移動 (1 次変換ともいう) を f とし、2 点 A と B が f でそれぞれ点 D と E に移動したとする。

[1] 平行四辺形 $OACB$ の面積 S_1 は、 a, b, c, d を用いて、 $S_1 = \boxed{\text{ケ}}$ と表され、ベクトル $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ によって点 F を定め、平行四辺形 $ODFE$ の面積を S_2 とおくと、 p, q を用いて、 $\frac{S_2}{S_1} = \boxed{\text{コ}}$ となる。

[2] ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ が垂直であり、ベクトル $\overrightarrow{OD}$ と $\overrightarrow{OE}$ が垂直であるとする。 $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ が垂直であるから a, b, c, d は $\boxed{\text{サ}} = 0$ を満たす。このことと $\overrightarrow{OD}$ と $\overrightarrow{OE}$ が垂直であることより、 a, b, c, d はもう 1 つの関係式 $\boxed{\text{シ}} = 0$ を満たす。このとき、

$$\overrightarrow{OA} = \boxed{\text{ス}}, \text{ または } \overrightarrow{OA} = \boxed{\text{セ}}$$

であり、

$$\overrightarrow{OA} = \boxed{\text{ス}} \text{ であれば, } \overrightarrow{OB} = \boxed{\text{ソ}}, \overrightarrow{OD} = \left(\boxed{\text{タ}} \right) \overrightarrow{OA},$$

$$\overrightarrow{OA} = \boxed{\text{セ}} \text{ であれば, } \overrightarrow{OB} = \boxed{\text{チ}}, \overrightarrow{OD} = \left(\boxed{\text{ツ}} \right) \overrightarrow{OA}$$

となる。

(注: $\boxed{\text{ス}}, \boxed{\text{セ}}$ には a を用いた成分表示, $\boxed{\text{ソ}}, \boxed{\text{チ}}$ には c を用いた成分表示, $\boxed{\text{タ}}, \boxed{\text{ツ}}$ には p, q を用いた式を記せ。)

Ⅲ a, b を実数とし, $\alpha = a + bi$ とおき, $\bar{\alpha}$ を α と共役な複素数とする。ただし, i は虚数単位で, $b > 0$ とする。 r, s を $r \neq 0$ または $s \neq 0$ となる実数とし, 実数 a', b' を,

$$a' = ar + bs,$$

$$b' = as - br$$

で定め, $\beta = a' + b'i$ とおき, $\bar{\beta}$ を β と共役な複素数とする。

2つの2次式 $f(x), g(x)$ を

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha}),$$

$$g(x) = (x - \beta)(x - \bar{\beta})$$

とし, すべての実数 x に対して $f(x) = g(x)$ となっているとする。 テ ~ ノ には a, b または数値を用いて記せ。

$f(x) = g(x)$ より, $a' =$ テ であり,

$b' > 0$ とすれば $b' =$ ト, $b' < 0$ とすれば $b' =$ ナ

である。

$b' =$ ト のとき, $r =$ ニ, $s =$ ヌ

となり,

$b' =$ ナ のとき, $r =$ ネ, $s =$ ノ

となる。また, 複素数 $w = u + vi$ (u, v は実数) に対して, u', v' を

$$u' = ur + vs,$$

$$v' = us - vr$$

と定め, $w' = u' + v'i$ とおく。 $\bar{w}$ を w と共役な複素数とすれば,

$$b' = \text{ト} \text{ のとき, } w' = \left(\text{ハ} \right) \bar{w},$$

$$b' = \text{ナ} \text{ のとき, } w' = \left(\text{ヒ} \right) \bar{w}$$

となる。なお, ハ, ヒ には, $\alpha, \bar{\alpha}$ または数値を用いて記せ。

IV n を自然数とし,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x |\cos(2n+1)x| dx$$

とおく。

$t = (2n+1)x$ とおくと, x と t の対応は右表のようになり, このとき,

x	$0 \longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	$0 \longrightarrow$	$\boxed{\text{フ}}$

$$I_n = \frac{1}{\boxed{\text{ヘ}}} \int_0^{\boxed{\text{フ}}} t |\cos t| dt$$

となる。さて,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t |\cos t| dt = \boxed{\text{ホ}}$$

であり, k が自然数のとき

$$\int_{(k-\frac{1}{2})\pi}^{(k+\frac{1}{2})\pi} t |\cos t| dt = \boxed{\text{マ}}$$

であるから,

$$\int_0^{\boxed{\text{フ}}} t |\cos t| dt = \boxed{\text{ミ}}$$

となる。したがって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \boxed{\text{ム}}$$

である。

(注: $\boxed{\text{フ}} \sim \boxed{\text{ム}}$ には n または k を用いた式, または数値を記せ。)