

(第3時限：100分)

2009年度 ⑤

数 学 問 題

(理 系)

(全5ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ a, b を実数とし，行列 A を $A = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ とする。

〔1〕 x, y についての連立1次方程式が，行列を用いて

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \dots\dots ①$$

と表されているとする。連立1次方程式①がただ1つの解をもつための必要十分条件は ア であり，①が解をもたないための必要十分条件は イ であり，①が解を無限にもつための必要十分条件は ウ である。

〔2〕 a, b を正の数とする。このとき，行列 A は

$$A^2 + \left(\begin{pmatrix} \text{エ} \end{pmatrix} \right) A + \left(\begin{pmatrix} \text{オ} \end{pmatrix} \right) E = O$$

を満たす。ただし， E は2次の単位行列で， O は2行2列の零行列である。 t についての2次方程式

$$t^2 + \left(\begin{pmatrix} \text{エ} \end{pmatrix} \right) t + \begin{pmatrix} \text{オ} \end{pmatrix} = 0$$

は解 $t = \begin{pmatrix} \text{カ} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \text{キ} \end{pmatrix}$ をもつ (ただし $\begin{pmatrix} \text{カ} \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} \text{キ} \end{pmatrix}$ とする)。

$t = \begin{pmatrix} \text{カ} \end{pmatrix}$ のとき， x と y に関する連立1次方程式

$$\left(A - \left(\begin{pmatrix} \text{カ} \end{pmatrix} \right) E \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす組 (x, y) で $x^2 + y^2 = 1$ かつ $x > 0$ となるものは

$(x, y) = \begin{pmatrix} \text{ク} \end{pmatrix}$ である。

また, $t = \boxed{\text{キ}}$ のとき, x と y に関する連立1次方程式

$$\left(A - \left(\boxed{\text{キ}} \right) E \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす組 (x, y) で $x^2 + y^2 = 1$ かつ $x > 0$ となるものは

$(x, y) = \boxed{\text{ケ}}$ である。

なお, $\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ には行列を用いず, a, bを用いた式を記。

Ⅱ 座標平面上の曲線 C が、媒介変数 t によって

$$x = \frac{1}{5}(4t - 3t^2), y = \frac{1}{5}(3t + 4t^2)$$

と表されているとする。

〔1〕 x と y の式から t を消去すれば

$$16x^2 + \boxed{\text{コ}} xy + \boxed{\text{サ}} y^2 + \boxed{\text{シ}} x + \boxed{\text{ス}} y = 0$$

となる。

〔2〕 曲線 C 上の点 $P\left(\frac{1}{5}(4t - 3t^2), \frac{1}{5}(3t + 4t^2)\right)$ と放物線 $y = x^2$ 上の点

$Q(-t, t^2)$ の中点 M の座標は t を用いて $\boxed{\text{セ}}$ と表されるので、 M は t の値に関係なく定直 $y = \boxed{\text{ソ}} x$ 上にある。また、 $P \neq Q$ のとき、この直線 $y = \boxed{\text{ソ}} x$ と 2 点 P, Q を通る直線は垂直である。

〔3〕 曲線 C と放物線 $y = x^2$ の原点以外の共有点の座標は $\boxed{\text{タ}}$ であり、曲線 C と放物線 $y = x^2$ で囲まれる部分の面積は $\boxed{\text{チ}}$ である。

Ⅲ

〔1〕 1個のさいころを、次の規則で勝者が決まるまで投げ続けるものとする。

偶数が出ると、A君は2点、

奇数が出ると、B君は1点

を得点し、先に4点取った方を勝者とする。多くとも 回まで投げると必ず勝者が決まる。また、A君が勝つ確率は である。

〔2〕 A君、B君、C君の3人でじゃんけんをすることにした。1回目は3人で始め、負けたものは抜けることとし、勝者が1人になるまで繰り返す。 n を自然数とし、 n 回目に勝者が1人になる確率を求める。

(a) 1回目で勝者が1人になる確率は である。

(b) 1回目では勝者が1人にならず、2回目に勝者が1人になる確率は である。

(c) $n \geq 3$ とし、 m は自然数で $1 < m < n$ とする。

(i) $n - 1$ 回目まで3人とも負けないで、 n 回目に勝者が1人になる確率は である。

(ii) 1回目に1人が負け、その後残った2人がじゃんけんを続け、初めから数えて n 回目に勝者が1人になる確率は である。

(iii) 1回目から $m - 1$ 回目まで3人とも負けないで、 m 回目に1人が負け、その後残った2人がじゃんけんを続け、初めから数えて n 回目に勝者が1人になる確率は である。

したがって、(i), (ii), (iii) より n 回目に勝者が1人になる確率は となる。

IV k を実数とし,

$$I(k) = \int_0^1 |e^x - k| dx$$

とする。

[1] k を用いて,

$$\begin{aligned} k \leq 1 \text{ のとき, } & I(k) = \boxed{\text{ハ}}, \\ 1 < k \leq e \text{ のとき, } & I(k) = \boxed{\text{ヒ}}, \\ e < k \text{ のとき, } & I(k) = \boxed{\text{フ}} \end{aligned}$$

となる。

[2] $0 \leq k \leq e$ とする。 $I(k)$ は

$$\begin{aligned} k = \boxed{\text{ヘ}} \text{ のとき, 最小値 } & \boxed{\text{ホ}}, \\ k = \boxed{\text{マ}} \text{ のとき, 最大値 } & \boxed{\text{ミ}} \end{aligned}$$

をとる。