I

〔解答〕

〔1〕　ア　$\frac{1}{2}at^2$　イ　$-\frac{9}{2}t^2+vt+1$

〔2〕　ウ　$\frac{1}{a}$　エ　$a+\frac{5}{a}$　オ　$\frac{1}{2}$　カ　$\frac{1}{a}$　キ　1

ク　$a-\frac{4}{a}$　ケ　$\sqrt{6}$　コ　$\frac{11\sqrt{6}}{6}$

〔解説〕

〔1〕

$f''(t)=a$ より，定数 C_1 を用いて

$$f'(t)=at+C_1$$

と表され，$f'(0)=0$ より $C_1=0$ となるから

$$f'(t)=at$$

である。さらに定数 C_2 を用いて

$$f(t)=\frac{1}{2}at^2+C_2$$

と表され，$f(0)=0$ より $C_2=0$ となるから

$$f(t)=\frac{1}{2}at^2$$

である。また，$g''(t)=-9$ より定数 D_1 を用いて

$$g'(t)=-9t+D_1$$

と表され，$g'(0)=v$ より $C_1=v$ となるから

$$g'(t)=-9t+v$$

である。さらに定数 D_2 を用いて

$$g(t)=-\frac{9}{2}t^2+vt+D_2$$

と表され，$g(0)=1$ より $D_2=1$ となるから

$$g(t)=-\frac{9}{2}t^2+vt+1$$

である。

〔2〕

ある時刻 T で P, Q が同じ点を通るとき

$$\begin{cases} f(T)=\frac{T}{2} \\ g(T)=\frac{T^2}{2}+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}aT^2=\frac{T}{2} & \cdots ① \\ -\frac{9}{2}T^2+vT+1=\frac{T^2}{2}+2 & \cdots ② \end{cases}$$

が成り立つ。①より

$$\frac{1}{2}aT^2=\frac{T}{2}$$
$$\Leftrightarrow T(aT-1)=0$$
$$\Leftrightarrow T=0,\ \frac{1}{a}\ (\because a>0)$$

となるが，$T=0$ のときは②を満たさず不適である。よって

$$T=\frac{1}{a}$$

である。このとき②より

$$-\frac{9}{2a^2}+\frac{v}{a}+1=\frac{1}{2a^2}+2$$
$$\Leftrightarrow v=a+\frac{5}{a}$$

となる。時刻 t における点 P の速度ベクトルを $\overrightarrow{v_P}(t)$ とおくと

$$\overrightarrow{v_P}(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2},\ \frac{t^2}{2}+2\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2},\ t\right)$$

であるから，時刻 T での点 P の速度ベクトルは

$$\overrightarrow{v_P}(T)=\left(\frac{1}{2},\ T\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{a}\right)$$

となる。また，時刻 t における点 Q の速度ベクトルを $\overrightarrow{v_Q}(t)$ とおくと

$$\overrightarrow{v_Q}(t)=\left(f'(t),\ g'(t)\right)$$
$$=(at,\ -9t+v)$$
$$=\left(at,\ -9t+a+\frac{5}{a}\right)$$

であるから，時刻 T での点 Q の速度ベクトルは

$$\overrightarrow{v_Q}(T)=\left(aT,\ -9T+a+\frac{5}{a}\right)$$
$$=\left(1,\ a-\frac{4}{a}\right)$$

となる。$\overrightarrow{v_P}(T)$, $\overrightarrow{v_Q}(T)$ が同じ向きであるとき，ある実数 $k\ (k>0)$ を用いて

$$\overrightarrow{v_P}(T)=k\overrightarrow{v_Q}(T)$$

と表される。このとき

$$\overrightarrow{v_P}(T)=k\overrightarrow{v_Q}(T)$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{a}\right)=k\left(1,\ a-\frac{4}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{a}=k\left(a-\frac{4}{a}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{1}{2} & \cdots ③ \\ \frac{1}{a}=k\left(a-\frac{4}{a}\right) & \cdots ④ \end{cases}$$

が成り立つ。③，④より

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{2}\left(a-\frac{4}{a}\right)$$
$$\Leftrightarrow a^2=6$$
$$\Leftrightarrow a=\sqrt{6}\ (\because a>0)$$

であり，このとき

$$v=\sqrt{6}+\frac{5}{\sqrt{6}}$$
$$=\frac{11\sqrt{6}}{6}$$

となる。

II

〔解答〕

〔1〕　サ　p　　シ　q　　ス　0, 2　　セ　0, 3, 4

〔2〕　ソ　$\dfrac{p+1}{2}$　　タ　$\dfrac{p}{2}+1$　　チ　$\dfrac{p^3-p}{12}$　　ツ　$\dfrac{2p^3+3p^2-2p}{24}$　　テ　$\dfrac{1}{12}$

〔解説〕

〔1〕

$0 \leqq \alpha \leqq \beta$ を満たす整数 α, β が $x^2-px+q=0$ の解であるとき，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=p \quad \cdots ①$$

$$\alpha\beta=q \quad \cdots ②$$

が成り立つ。このとき，2 次方程式の解は全て 0 以上の整数となり，かつ，②より q は整数である。逆に，q が 0 以上の整数であり，かつ，①，②を満たす整数 α, β が存在するとき，2 次方程式 $x^2-px+q=0$ の解は 0 以上の整数 α, β となる。よって $q \in Q(p)$ であるための必要十分条件は α, β が①，②を満たすことである。また，$p=3$ のとき，①を満たす整数 α, β（$0 \leqq \alpha \leqq \beta$）の組は

$$(\alpha, \beta)=(0, 3), (1, 2)$$

に限られる。②より，$(\alpha, \beta)=(0, 3)$ のとき $q=0$，$(\alpha, \beta)=(1, 2)$ のとき $q=2$ であるから，$Q(3)=\{0, 2\}$ となる。同様に，$p=4$ のとき，①を満たす整数 α, β（$0 \leqq \alpha \leqq \beta$）の組は

$$(\alpha, \beta)=(0, 4), (1, 3), (2, 2)$$

に限られる。②より，$(\alpha, \beta)=(0, 4)$ のとき $q=0$，$(\alpha, \beta)=(1, 3)$ のとき $q=3$，$(\alpha, \beta)=(2, 2)$ のとき $q=4$ であるから，$Q(4)=\{0, 3, 4\}$ となる。

〔2〕

[1] p が奇数のとき

$m=1, 2, 3, \cdots$ である整数 m を用いて $p=2m-1$ と表される。このとき，①を満たす整数 α, β（$0 \leqq \alpha \leqq \beta$）の組は

$$(\alpha, \beta)=(0, 2m-1), (1, 2m-2), \cdots, (m-1, m) \quad \cdots ③$$

となる。ここで，$0 \leqq k \leqq m-1$ である整数 k について $a_k=k(2m-k-1)$ とおくと，$0 \leqq n \leqq m-2$ である整数 n について

$$\begin{aligned} a_{n+1}-a_n &= (n+1)(2m-n-2)-n(2m-n-1) \\ &= 2m-2n-2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

であるから，$a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{m-2} < a_{m-1}$ となる。a_k は③の組のうち $\alpha=k$ である場合における $\alpha\beta$ の値であるから，③のそれぞれの組について②より互いに異なる q の値が得られる。よって，このときの集合 $Q(p)$ の個数 $N(p)$ は③の組の個数に等しく

$$\begin{aligned} N(p) &= m \\ &= \frac{p+1}{2} \end{aligned}$$

となる。また，②，③より，このときの $Q(p)$ のすべての要素の和 $S(p)$ は

$$\begin{aligned} S(p) &= \sum_{k=0}^{m-1} a_k \\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\{(2m-1)k-k^2\} \\ &= (2m-1)\frac{m(m-1)}{2}-\frac{m(m-1)(2m-1)}{6} \\ &= \frac{m(m-1)(2m-1)}{3} \\ &= \frac{p^3-p}{12} \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} \lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{p^3} &= \lim_{p\to\infty}\frac{1-\frac{1}{p^2}}{12} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

である。

[2] p が偶数のとき

$m=1, 2, 3, \cdots$ である整数 m を用いて $p=2m$ と表される。このとき，①を満たす整数 α, β（$0 \leqq \alpha \leqq \beta$）の組は

$$(\alpha, \beta)=(0, 2m), (1, 2m-1), \cdots, (m, m) \quad \cdots ③$$

となる。ここで，$0 \leqq k \leqq m$ である整数 k について $b_k=k(2m-k)$ とおくと，$0 \leqq n \leqq m-1$ である整数 n について

$$\begin{aligned} b_{n+1}-b_n &= (n+1)(2m-n-1)-n(2m-n) \\ &= 2m-2n-1 \\ &> 0 \end{aligned}$$

であるから，$b_0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_{m-1} < b_m$ となる。b_k は③の組のうち $\alpha=k$ である場合における $\alpha\beta$ の値であるから，③のそれぞれの組について②より互いに異なる q の値が得られる。よって，このときの集合 $Q(p)$ の個数 $N(p)$ は③の組の個数に等しく

$$\begin{aligned} N(p) &= m+1 \\ &= \frac{p}{2}+1 \end{aligned}$$

となる。また，②，③より，このときの $Q(p)$ のすべての要素の和 $S(p)$ は

$$\begin{aligned} S(p) &= \sum_{k=0}^{m} b_k \\ &= \sum_{k=0}^{m}(2mk-k^2) \\ &= 2m\cdot\frac{m(m+1)}{2}-\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \\ &= \frac{m(m+1)(4m-1)}{6} \\ &= \frac{2p^3+3p^2-2p}{24} \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} \lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{p^3} &= \lim_{p\to\infty}\frac{2+\frac{3}{p}-\frac{2}{p^2}}{24} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

である。

以上，[1], [2]より，p の偶奇に関わらず

$$\lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{p^3}=\frac{1}{12}$$

である。

III

〔解答〕

〔1〕　ト　1　　ナ　a

〔2〕　(a)　ニ　1　　ヌ　$\frac{2}{3}$

　　(b)　ネ　$-a^3+3a^2+b$　　ノ，ハ　$b,\ 3a+b-1$(順不同)　　ヒ　$\frac{1}{12}$　　フ　2

〔解説〕

〔1〕

$f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax+b$ について

$$f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a$$
$$=6(x-1)(x-a)$$

となり，$a<1$ であるから，$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	a	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

よって，$f(x)$ は $x=a$ において極大値をとる。

〔2〕

(a)

$$f(0)f(1)<0$$

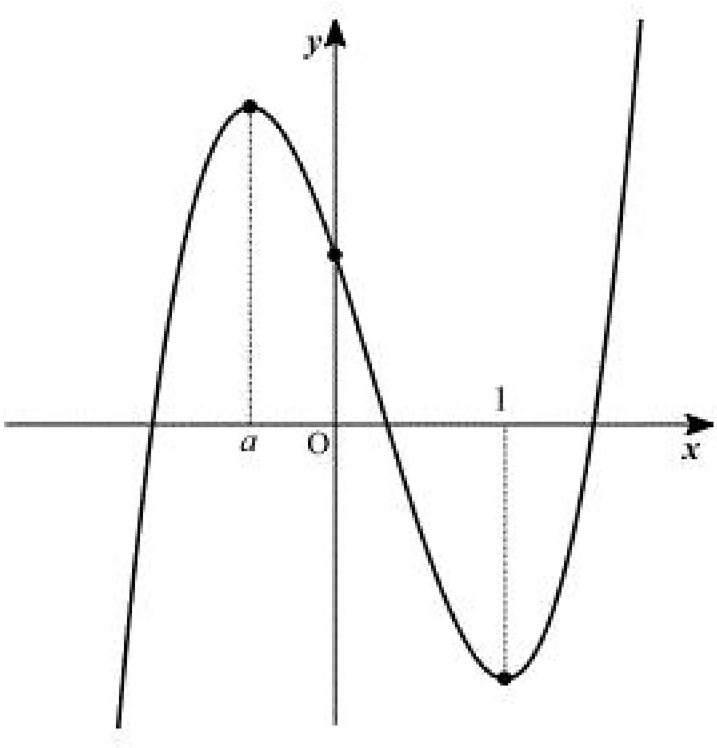
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0)>0 \\ f(1)<0 \end{cases} \text{または} \begin{cases} f(0)<0 \\ f(1)>0 \end{cases}$$

である。

[1]　$f(0)>0$ かつ $f(1)<0$ のとき

[i]　$a<0$ のとき

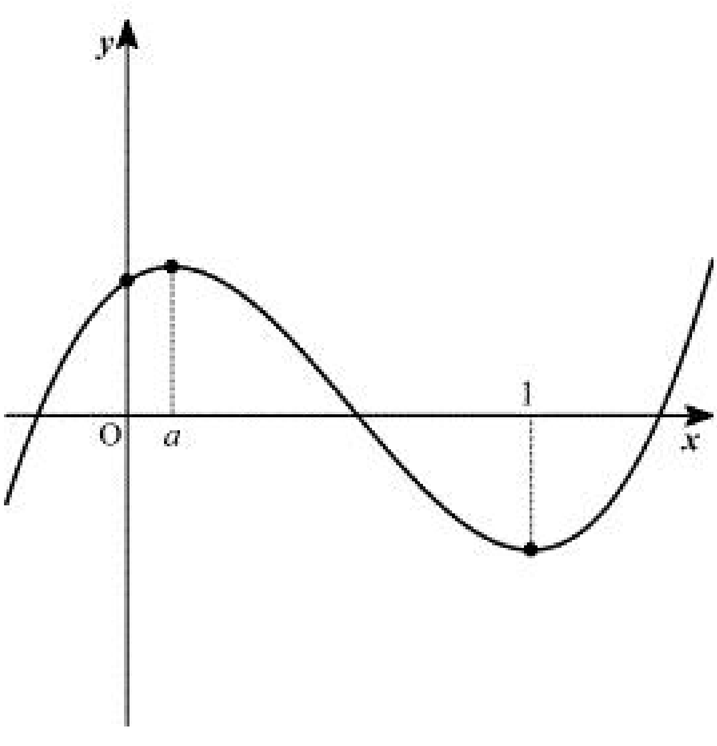
$f(x)$ は $x=1$ において極小値をとるから，$f(0)>0$ かつ $f(1)<0$ を満たすような $y=f(x)$ のグラフの概形は下図のようになる。



このとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との交点は $0<x<1$ の範囲にただ 1 つ存在するから，方程式 $f(x)=0$ の $0<x<1$ なる実数解はただ 1 個存在する。

[ii]　$0 \leqq a<1$ のとき

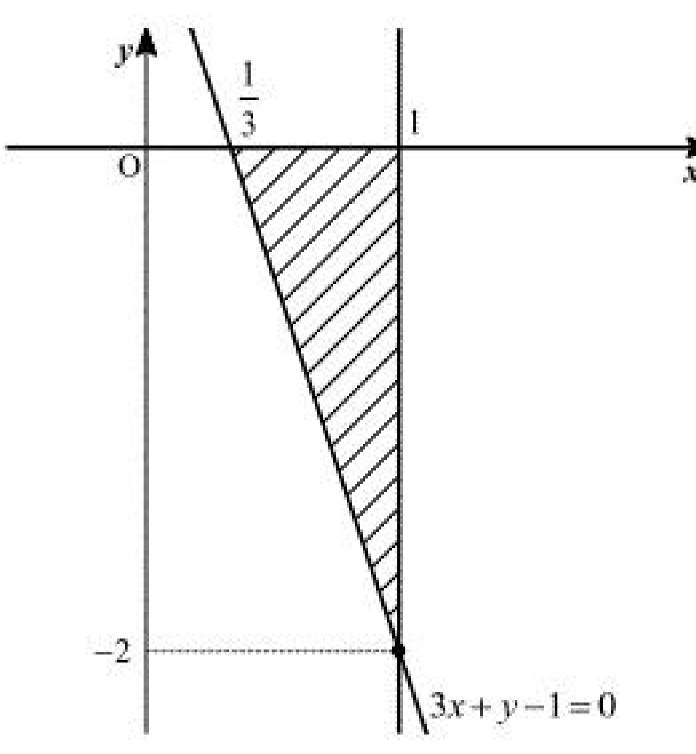
$f(x)$ は $x=1$ において極小値をとるから，$f(0)>0$ かつ $f(1)<0$ を満たすような $y=f(x)$ のグラフの概形は下図のようになる。



このとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との交点は $0<x<1$ の範囲にただ 1 つ存在するから，方程式 $f(x)=0$ の $0<x<1$ なる実数解はただ 1 個存在する。

[2]　$f(0)<0$ かつ $f(1)>0$ のとき

$f(x)$ は $x=1$ において極小値をとるから，$f(0)<0$ かつ $f(1)>0$ を満たすような



よって，この領域に境界線を含めた図形の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot 2=\frac{2}{3}$$

である。

(b)

$$x_0=a$$
$$f(0)=b$$
$$f(1)=3a+b-1$$
$$f(a)=-a^3+3a^2+b$$

であるから，(ii)の場合

$0<a<1$ かつ $-a^3+3a^2+b \geqq 0$ かつ $b \leqq 0$ かつ $3a+b-1 \leqq 0$　　・・・①

(ただし $b=3a+b-1=0$ となる場合を除く)

となる。ここで，$g(x)=x^3-3x^2$ とおくと

$$g'(x)=3x^2-6x$$
$$=3x(x-2)$$

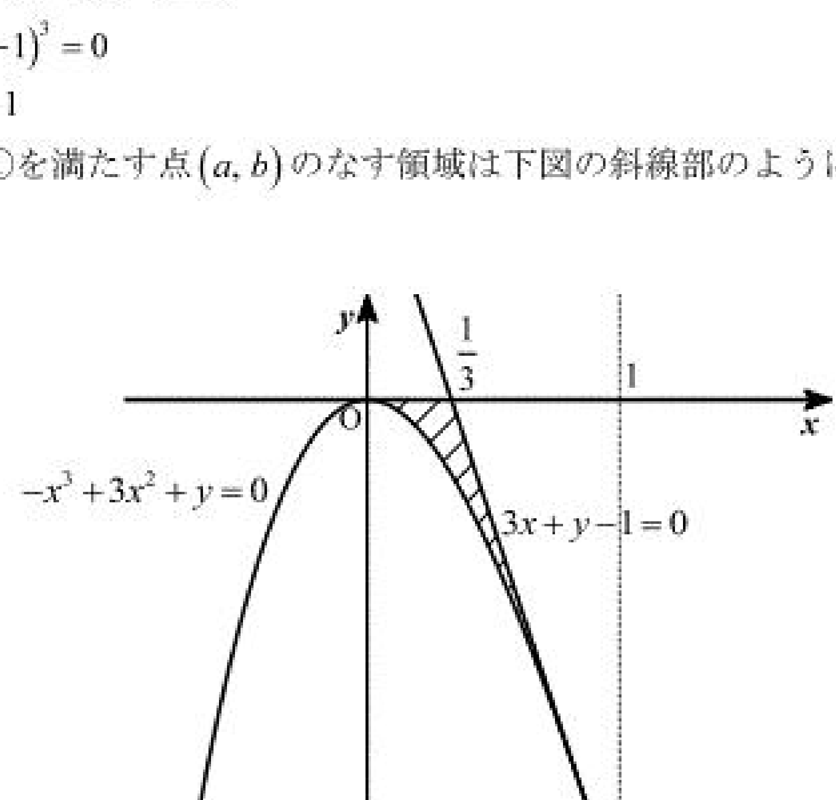
となるから，$g(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	0	↘	−4	↗

さらに，$-x^3+3x^2+y=0 \Leftrightarrow y=g(x)$ と $3x+y-1=0$ の交点の x 座標は

$$g(x)=-3x+1$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2+3x-1=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^3=0$$
$$\Leftrightarrow x=1$$

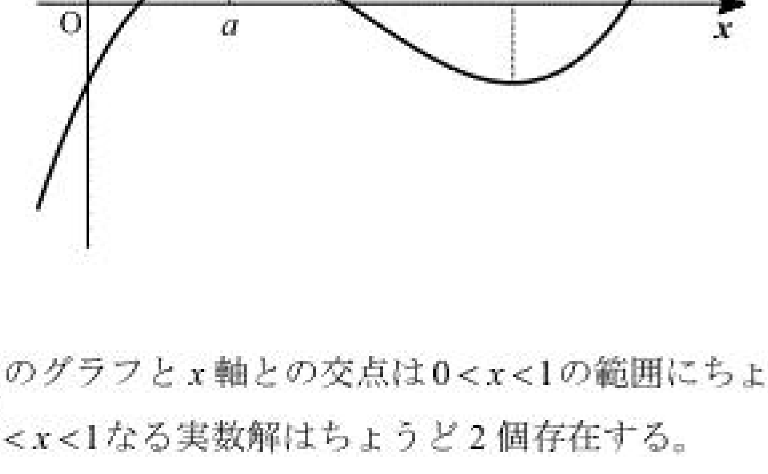
であるから，①を満たす点 $(a,\ b)$ のなす領域は下図の斜線部のようになる。



よって，この領域に境界線を含めた図形の面積は

$$\int_0^1\{-g(x)\}dx-\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot 2=\left[-\frac{x^4}{4}+x^3\right]_0^1-\frac{2}{3}$$
$$=\frac{1}{12}$$

である。なお，(ii)の場合，$f(x_0)>0$ かつ $f(0)f(1)>0$ を満たすとき，$y=f(x)$ のグラフの概形は下図のようになる。



このとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との交点は $0<x<1$ の範囲にちょうど 2 つ存在するから，方程式 $f(x)=0$ の $0<x<1$ なる実数解はちょうど 2 個存在する。

IV

〔解答〕

〔1〕　ヘ　$-(ar)^n t\sin\dfrac{n\pi}{k}$　ホ　$(ar)^n t\cos\dfrac{n\pi}{k}$　マ　$t \geqq r$

〔2〕　ミ　$\dfrac{1}{a}$　ム　r　メ　$\log_a\dfrac{r}{t}$　モ　$-\log_a 2$

〔解説〕

〔1〕

領域 $D: x^2+y^2<r^2$ は原点中心で，半径 r の円の内部を表す。ここで

$$\begin{pmatrix} ar\cos\dfrac{\pi}{k} & -ar\sin\dfrac{\pi}{k} \\ ar\sin\dfrac{\pi}{k} & ar\cos\dfrac{\pi}{k} \end{pmatrix} = ar\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{k} & -\sin\dfrac{\pi}{k} \\ \sin\dfrac{\pi}{k} & \cos\dfrac{\pi}{k} \end{pmatrix}$$

であるから，この行列で表される 1 次変換は,原点周りに $\dfrac{\pi}{k}$ だけ回転させて，かつ原点からの距離を ar 倍に拡大する変換である。これを n 回行うと，原点周りに $\dfrac{n\pi}{k}$ だけ回転し，原点からの距離は $(ar)^n$ 倍に拡大されるから，P_n の座標は

$$(ar)^n\begin{pmatrix} \cos\dfrac{n\pi}{k} & -\sin\dfrac{n\pi}{k} \\ \sin\dfrac{n\pi}{k} & \cos\dfrac{n\pi}{k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(ar)^n t\sin\dfrac{n\pi}{k} \\ t(ar)^n\cos\dfrac{n\pi}{k} \end{pmatrix}$$

である。$r=\dfrac{1}{a}$ のとき，$\mathrm{P}_n\left(-t\sin\dfrac{n\pi}{k},\ t\cos\dfrac{n\pi}{k}\right)$ となり，全ての n について点 P_n は原点から t の距離にある。よって，$\mathrm{P}_n \notin D$ となるための必要十分条件は

$$t \geqq r$$

である。

〔2〕

〔1〕の結果を用いて

$$\mathrm{P}_n\left(-(ar)^n t\sin\frac{n\pi}{k},\ (ar)^n t\cos\frac{n\pi}{k}\right)$$

$$\mathrm{P}_{n+1}\left(-(ar)^{n+1} t\sin\frac{(n+1)\pi}{k},\ (ar)^{n+1} t\cos\frac{(n+1)\pi}{k}\right)$$

となるから，点 P_n は原点から $(ar)^n t$ の距離にあり，点 P_{n+1} は原点から $(ar)^{n+1} t$ の距離にあるから

$$\mathrm{P}_n \notin D \text{ かつ } \mathrm{P}_{n+1} \in D \text{ かつ } n \geqq 0 \qquad \cdots ①$$

となるような n が存在するとき

$$\mathrm{P}_n \notin D$$

$$\Leftrightarrow (ar)^n t \geqq r$$

となり，また

$$\mathrm{P}_{n+1} \in D$$

$$\Leftrightarrow (ar)^{n+1} t < r$$

$$\Leftrightarrow (ar)^n < \frac{1}{at}$$

となるから

$$\frac{r}{t} \leqq (ar)^n < \frac{1}{at} \qquad \cdots ③$$

となるような $n \geqq 0$ である n が存在する。このとき

$$\frac{r}{t} < \frac{1}{at}$$

$$\Leftrightarrow ar < 1$$

であり，さらに $ar>0$ より $n \geqq 0$ のとき

$$0 < ar < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < (ar)^n \leqq 1 \qquad \cdots ④$$

となる。よって，③，④が成り立つとき

$$\frac{r}{t} \leqq 1$$

$$\Leftrightarrow t \geqq r$$

となる。以上より，①となるような n が存在する必要十分条件は

$$ar < 1 \text{ かつ } t \geqq r$$

$$\Leftrightarrow 0 < r < \frac{1}{a}\ (\because r>0) \text{ かつ } t \geqq r$$

である。a の底とする対数を考えるにあたり，$0<a<1,\ 1<a$ であると仮定する。

[1]　$0<a<1$ のとき

③について a を底とする対数をとって

$$\log_a\frac{1}{at} < \log_a(ar)^n \leqq \log_a\frac{r}{t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_a\frac{1}{at}}{\log_a ar} < n \leqq \frac{\log_a\frac{r}{t}}{\log_a ar}\ (\because ar<1 \Leftrightarrow \log_a ar>0) \qquad \cdots ⑤$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1-\log_a t}{1+\log_a r} < n \leqq \frac{\log_a r-\log_a t}{1+\log_a r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_a r-\log_a t}{1+\log_a r}-1 < n \leqq \frac{\log_a r-\log_a t}{1+\log_a r}$$

となるから，このときの n の値は

$$n = \left[\frac{\log_a r-\log_a t}{1+\log_a r}\right]$$

$$= \left[\frac{\log_a\frac{r}{t}}{1+\log_a r}\right]$$

である。

[2]　$1<a$ のとき

③について a を底とする対数をとって

$$\log_a\frac{r}{t} \leqq \log_a(ar)^n < \log_a\frac{1}{at}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_a\frac{1}{at}}{\log_a ar} < n \leqq \frac{\log_a\frac{r}{t}}{\log_a ar}\ (\because ar<1 \Leftrightarrow \log_a ar<0)$$

となり，④と一致するから，このときの n の値は

$$n = \left[\frac{\log_a\frac{r}{t}}{1+\log_a r}\right]$$

である。

以上, [1], [2] より，①を満たす n の値は

$$n = \left[\frac{\log_a\frac{r}{t}}{1+\log_a r}\right] \qquad \cdots ②$$

である。$t=2r$ のとき，②より

$$n = \left[\frac{-\log_a 2}{1+\log_a r}\right]$$

である。$\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_n$ の x 座標は

$$-(ar)^m t\sin\frac{m\pi}{k}\ (m=0, 1, \cdots, n)$$

であり，$(ar)^m t>0$ であるから，この値がつねに 0 または負になるとき，$\sin\dfrac{m\pi}{k} \geqq 0$ が $m=0, 1, \cdots, n$ で成り立つ。$k \geqq 2$ より $\dfrac{\pi}{k} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\sin\frac{m\pi}{k} \geqq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqq \frac{m\pi}{k} \leqq \pi$$

が $m=0, 1, \cdots, n$ で成り立ち，このとき

$$\frac{n\pi}{k} \leqq \pi$$

$$\Leftrightarrow k \geqq n$$

となる。よって，求める k の条件は

$$k \geqq \left[\frac{-\log_a 2}{1+\log_a r}\right]$$

である。