（第３時限：100分）

2010年度　⑤

# 数　学　問　題

（理　　系）

（全４ページ）

**注　意　事　項**

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の $\boxed{\phantom{xx}}$ にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙１枚・下書用紙２枚は，この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後，問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

# 数　学

**次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の $\boxed{\phantom{ア}}$ にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。**

Ⅰ　$a$，$v$ を定数とし，$a>0$ であるとする。平面上を動く2点P，Qを考える。時刻 $t$ での点Pの座標は $\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t^2}{2}+2\right)$ であるとする。時刻 $t$ での点Qの座標を $(f(t),\ g(t))$ と表すとき，$t$ の関数 $f(t)$，$g(t)$ は第2次導関数をもつものとし，時刻0で点 $(0,\ 1)$ を通り，その時刻における速度ベクトルは $(0,\ v)$ であるとする。さらに，点Qの加速度ベクトルは，つねに $(a,\ -9)$ であるとする。このとき，ある時刻 $T$ に，2点P，Qが同じ点を同じ向きの速度ベクトルで通るように $a$，$v$ を定めよう。

〔1〕 まず，$f(t)$，$g(t)$ は関係式

$$f''(t)=a,\qquad f'(0)=0,\quad f(0)=0$$
$$g''(t)=-9,\quad g'(0)=v,\quad g(0)=1$$

を満たすので，$f(t)=\boxed{\text{ア}}$，$g(t)=\boxed{\text{イ}}$ となる。

〔2〕 ある時刻 $T$ でP，Qが同じ点を通ることは，$T$，$v$ が $a$ を用いて $T=\boxed{\text{ウ}}$，および，$v=\boxed{\text{エ}}$ と書き表せることと同値である。この時刻 $T$ での点Pの速度ベクトルを $a$ だけで表すと $\left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$ となり，時刻 $T$ での点Qの速度ベクトルを $a$ だけで表すと $\left(\boxed{\text{キ}},\ \boxed{\text{ク}}\right)$ となる。この二つのベクトルが同じ向きであることは，$a=\boxed{\text{ケ}}$ と同値であり，このとき，$v=\boxed{\text{コ}}$ となる。

Ⅱ　$p$ を正の整数とする。2次方程式

$$x^2 - px + q = 0$$

の解がいずれも0以上の整数となるような整数 $q$ 全体の集合を $Q(p)$ とする。

〔1〕 まず，$q \in Q(p)$ であるための必要十分条件は，ある整数 $\alpha$，$\beta$ $(0 \leqq \alpha \leqq \beta)$ が $\alpha + \beta = \boxed{\text{サ}}$，$\alpha\beta = \boxed{\text{シ}}$ をみたすことであるから，$Q(3)$ を，要素を書き並べて表すと $\left\{ \boxed{\text{ス}} \right\}$ となる。同様に，$Q(4)$ を，要素を書き並べて表すと $\left\{ \boxed{\text{セ}} \right\}$ となる。

〔2〕 一般に集合 $Q(p)$ の要素の個数を $N(p)$ と書くと，$p$ が奇数のときは

$$N(p) = \boxed{\text{ソ}},$$

$p$ が偶数のときは

$$N(p) = \boxed{\text{タ}}$$

となる。さらに，$Q(p)$ のすべての要素の和を $S(p)$ と書くと，$p$ が奇数のときは

$$S(p) = \boxed{\text{チ}},$$

$p$ が偶数のときは

$$S(p) = \boxed{\text{ツ}}$$

となり，いずれも $p$ についての3次の多項式である。

以上のことから

$$\lim_{p \to \infty} \frac{S(p)}{p^3} = \boxed{\text{テ}}$$

となる。

III　$a$，$b$ を実数とし，$a < 1$ とする。$x$ についての3次式

$$f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax + b$$

を考える。このとき，3次方程式 $f(x) = 0$ が $0 < x < 1$ の範囲で少なくとも1つの実数解を持つような $a$，$b$ を考えよう。

〔1〕 まず，$f(x)$ を $x$ で微分すると

$$f'(x) = 6\left(x - \boxed{\text{ト}}\right)\left(x - \boxed{\text{ナ}}\right)$$

となり，$f(x)$ は $x = \boxed{\text{ナ}}$ において極大値をとる。

〔2〕 $x_0 = \boxed{\text{ナ}}$ とおく。すると3次方程式 $f(x) = 0$ が $0 < x < 1$ なる実数解をもつのは，次のいずれかの場合であることがわかる。

（i） $f(0)f(1) < 0$ となる場合

（ii） $0 < x_0 < 1$ かつ $f(x_0) \geqq 0$ かつ $f(0) \leqq 0$ かつ $f(1) \leqq 0$（ただし $f(0) = f(1) = 0$ となる場合を除く）のすべての条件を満たす場合

（a） （i）の場合，$0 < x < 1$ なる実数解はちょうど $\boxed{\text{ニ}}$ 個存在する。特に，$f(0) < 0$ かつ $f(1) > 0$ の場合，この条件を成立させるような $a$，$b$ を考えよう。その $a$，$b$ に対応する座標平面上の点 $(a, b)$ のなす領域に境界線を含めた図形の面積は $\boxed{\text{ヌ}}$ となる。

（b） 次に，（ii）の場合，$f(x)$ についての条件を，$a$，$b$ についての条件として表すと

$$0 < \boxed{\text{ナ}} < 1 \text{ かつ } \boxed{\text{ネ}} \geqq 0$$
$$\text{かつ } \boxed{\text{ノ}} \leqq 0 \text{ かつ } \boxed{\text{ハ}} \leqq 0$$
$$\text{（ただし } \boxed{\text{ノ}} = \boxed{\text{ハ}} = 0 \text{ となる場合を除く）}$$

となる。この条件を満たす $a$，$b$ を考えよう。その $a$，$b$ に対応する座標平面上の点 $(a, b)$ のなす領域に境界線を含めた図形の面積は $\boxed{\text{ヒ}}$ となる。なお，$f(x_0) > 0$ かつ $f(0)f(1) > 0$ の場合，$0 < x < 1$ なる実数解はちょうど $\boxed{\text{フ}}$ 個存在する。

Ⅳ　$a$, $r$, $t$ を正の実数とし，座標平面上で $x$, $y$ の不等式 $x^2+y^2<r^2$ の表す領域 $D$ と，点 $\mathrm{P}_0(0,\ t)$ を考える。$k$ を2以上の整数とし，行列

$$\begin{pmatrix} ar\cos\dfrac{\pi}{k} & -ar\sin\dfrac{\pi}{k} \\ ar\sin\dfrac{\pi}{k} & ar\cos\dfrac{\pi}{k} \end{pmatrix}$$

で表される1次変換を $\ell$ 回（$\ell=1,2,3,\cdots$）繰り返して行うことによって点 $\mathrm{P}_0$ が移される点を $\mathrm{P}_\ell$ とする。

〔1〕 $n=0,1,2,\cdots$ とするとき，$\mathrm{P}_n$ の座標は $\left(\boxed{\text{ヘ}},\ \boxed{\text{ホ}}\right)$ となり，$r=\dfrac{1}{a}$ のとき，どの $n$ についても $\mathrm{P}_n \notin D$ となるための必要十分条件は，$t$ と $r$ を使って $\boxed{\text{マ}}$ と表すことができる。

〔2〕 次に $r \neq \dfrac{1}{a}$ のとき，

$$\mathrm{P}_n \notin D \text{ かつ } \mathrm{P}_{n+1} \in D \text{ かつ } n \geqq 0 \qquad \cdots\cdots①$$

となるような $n$ が存在するための必要十分条件は，$0<r<\boxed{\text{ミ}}$ かつ $t \geqq \boxed{\text{ム}}$ である。このとき，①を満たす $n$ の値は $a$ を底とする対数を使って

$$n=\left[\frac{\boxed{\text{メ}}}{1+\log_a r}\right] \qquad \cdots\cdots②$$

と表せる。ただし，実数 $u$ について $m \leqq u < m+1$ を満たす整数 $m$ を $[u]$ と表す。

今，$t=2\times\boxed{\text{ム}}$ としよう。このとき，②で定まった $n$ について，$\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_{n-1}, \mathrm{P}_n$ の $x$ 座標がつねに0または負になるための必要十分条件は

$$k \geqq \left[\frac{\boxed{\text{モ}}}{1+\log_a r}\right]$$

である。