（第３時限：100分）

2010年度　②

数　学　問　題

（理　　系）

（全６ページ）

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の $\boxed{}$ にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙１枚・下書用紙２枚は，この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後，問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数　学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の $\boxed{}$ にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ　i を虚数単位とする。

〔1〕　θ_1，θ_2 を実数とすると，$\dfrac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} = \cos\boxed{\text{ア}} + i\sin\boxed{\text{ア}}$ である。

〔2〕　複素数 $1+\sqrt{3}i$ と $1+i$ は

2

$$1+\sqrt{3}i = \boxed{\text{イ}}\left(\cos\boxed{\text{ウ}} + i\sin\boxed{\text{ウ}}\right)$$

√2

$$1+i = \boxed{\text{エ}}\left(\cos\boxed{\text{オ}} + i\sin\boxed{\text{オ}}\right)$$

と表せるから，〔1〕より

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} = \boxed{\text{カ}}\left(\cos\boxed{\text{キ}} + i\sin\boxed{\text{キ}}\right)$$

となる。ただし，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ は，いずれも 0 以上 π 未満とする。

一方，三角関数を用いずに計算すると

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} = \boxed{\text{ク}} + \boxed{\text{ケ}}\,i$$

であるから，$\cos\boxed{\text{キ}} = \boxed{\text{コ}}$，$\sin\boxed{\text{キ}} = \boxed{\text{サ}}$ である。

Ⅱ

〔1〕 定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^x\,dx$ の値を計算すると $\boxed{\text{シ}}$ となる。また，a を任意の定数とするとき，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(x+a)\,dx = -\frac{1}{2}(e^{\pi}-e^{-\pi})\left(\boxed{\text{ス}}\right)$ となる。

〔2〕 x の関数 $f(x)=e^{\frac{x}{2}}\cos\dfrac{x}{2}$ を使って，t の関数を

$h(t)=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)f(x-t)\,dx$ と定めると

$$h(t)=\frac{1}{4}\left(\boxed{\text{セ}}\right)e^{-\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{t}{2}+\boxed{\text{ソ}}\right)$$

となる。したがって，0 以上の任意の整数 k に対して

$$h(2k\pi)=\frac{1}{4}\left(\boxed{\text{セ}}\right)\left(\boxed{\text{タ}}\right)^k$$

となる。さらに

$$\sum_{k=0}^{\infty} h(2k\pi)=\frac{1}{4}\left(\boxed{\text{チ}}-1\right)$$

となる。

(Mab②)

Ⅲ　p を正の実数とし，座標平面上の２点 P$(1,\ p)$，および Q$(2,\ 0)$ を考える。

〔１〕 P と Q を通る直線 l の方程式は

$$\boxed{\text{ツ}}\,x+y+\boxed{\text{テ}}=0$$

であり，線分 PQ の中点を通り l と直交する直線の方程式は

$$x+\boxed{\text{ト}}\,y+\boxed{\text{ナ}}=0$$

である。

〔２〕 P と Q を通り，y 軸に接する円を考える。このような円は各 p に対して２個あるため，y 軸との接点 R$(0,\ t)$ のとり方も２通りあるが，ここでは t の値が小さい方を考えることにする。このとき，円の中心 C の座標は t と p を使って

$$\left(\frac{3+\boxed{\text{ニ}}-p^2}{2},\ t\right)$$

と表すことができる。さらに，CR $=$ CQ $=$ CP であることより，t は p で表すことができ，$t=\boxed{\text{ヌ}}$ となる。p が正の実数の範囲を動くとき，この円の半径は $p=\boxed{\text{ネ}}$ のときに最小値 $\boxed{\text{ノ}}$ をとる。

（このページは空白）

Ⅳ　直線 $y=x$ を l_1 とし，直線 $y=2x$ を l_2 とする。l_1 に関する対称移動を g_1，l_2 に関する対称移動を g_2 と呼ぶことにする。また，g_1 を行った後で，さらに g_2を行う合成変換を f とすると，これは１次変換である。そこで f を表す行列を求めてみよう。

〔１〕　まず，直線 l_1 を f で移して得られる直線 l_3 を求めよう。そのために，g_2 によって直線 l_1 上の点 P(１，１) が移される点 P′ の座標を調べる。P を通って l_2 に垂直な直線上の点の座標を媒介変数 t を使って

$$\left(\boxed{\text{ハ}}\,t+1,\ t+1\right)$$

と表すと，この点は $t=0$ のときにPに対応し，$t=\boxed{\text{ヒ}}$ のときに直線 l_2 上の点となるので，$t=\boxed{\text{フ}}$ のときに P′ に対応する。

以上のことから，直線 l_3 の方程式は

$$y=\boxed{\text{ヘ}}\,x+\boxed{\text{ホ}}$$

となることがわかる。

〔2〕 次に，原点以外の任意の点Qをとる。Qを g_1 で移した点をQ′，さらにQ′を g_2 で移した点をQ″とする。直線 l_1 上の点で，原点Oを中心に角 $-\alpha$ だけ回転移動させたときにQに一致するものをRとすると，点Q′は原点を中心にRを角 $\boxed{\text{マ}}$ だけ回転移動させたものに一致する。したがってQ″は，点Rを g_2 によって直線 l_3 上に移した点を，原点を中心に角 $\boxed{\text{ミ}}$ だけ回転移動させたものに一致する。

以上のことから，2直線 l_1 と l_2 のなす角を θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ としたとき，f は，原点を中心とする角 $\boxed{\text{ム}}$ の回転移動であることがわかる。ここで，点P(1，1)は f によってP′に移されるので

$$\begin{pmatrix} \cos \boxed{\text{ム}} & -\sin \boxed{\text{ム}} \\ \sin \boxed{\text{ム}} & \cos \boxed{\text{ム}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\text{メ}}\begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\text{モ}} \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

以上より，1次変換 f は有理数を成分とする行列

$$\begin{pmatrix} \boxed{\text{ヤ}} & -\boxed{\text{ユ}} \\ \boxed{\text{ユ}} & \boxed{\text{ヤ}} \end{pmatrix}$$

で表されることがわかる。