

【解答】

[1] ア 4 イ -7 ウ -15 エ 14 オ 2

 [2] カ -4 キ -2 ク 0 ケ 3 コ 4 サ 9

 シ -14 ス $-\frac{k}{2}$ セ $-\frac{1}{2}k^2-3k-4$ ソ $-2x^2$

 [3] タ $n(n+1)$ チ $n(n+1)(n+2)$ ツ $\frac{1}{n(n+1)}$

 テ $1-\frac{1}{n+1}$ ト $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ ナ $\sqrt{n+1}-1$

【解説】

[1]

α, β は 2 次方程式 $2x^2-4x+1=0$ の解であるから、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha+\beta=\frac{4}{2}=2 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \alpha\beta=\frac{1}{2} & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成り立つ。また、2 次方程式 $2x^2+px+q=0$ (ただし、 p, q は実数定数) が $\alpha-\frac{1}{\alpha}, \beta-\frac{1}{\beta}$ を解にもつとき、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha-\frac{1}{\alpha}+\beta-\frac{1}{\beta}=-\frac{p}{2} & \cdots \cdots \textcircled{3} \\ \left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)=\frac{q}{2} & \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

が成り立つから、①、②、③より、

$$\begin{aligned} p &= -2\left\{(\alpha+\beta)-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\right\} \\ &= -2\left\{(\alpha+\beta)-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right\} \\ &= -2\left(2-\frac{2}{\frac{1}{2}}\right) \\ &= -2\cdot(-2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

と求まり、①、②、④より、

$$\begin{aligned} q &= 2\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right) \\ &= 2\left(\alpha\beta-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\beta}\right) \\ &= 2\left(\alpha\beta-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}\right) \\ &= 2\left(\alpha\beta-\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}-\frac{2^2-2\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}-6+2\right) \\ &= -7 \end{aligned}$$

と求まる。以上より、 $\alpha-\frac{1}{\alpha}, \beta-\frac{1}{\beta}$ を 2 解にもつ 2 次方程式は、

$$2x^2+4x-7=0$$

である。

さらに、3 次方程式 $2x^3+ax+b=0$ (ただし、 a, b は実数定数) もまた $\alpha-\frac{1}{\alpha}, \beta-\frac{1}{\beta}$ を解にもつとき、残りの解を γ とすると、

$$2x^3+ax+b=(2x^2+4x-7)(x-\gamma) \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

なる恒等式が成り立つ。ここで、⑤の右辺は、

$$(2x^2+4x-7)(x-\gamma)=2x^3+2(-\gamma+2)x^2-(4\gamma+7)x+7\gamma$$

と展開できるので、⑤が任意の x について成り立つためには、

$$\begin{cases} 0=2(-\gamma+2) \\ a=-(4\gamma+7) \\ b=7\gamma \end{cases}$$

が成り立てばよい。したがって、上式を解くと、

$$(a, b, \gamma)=(-15, 14, 2)$$

と求まる。

[2]

与えられた 2 次関数の式は、

$$\begin{aligned} y &= -2x^2+2kx+3k+4 \\ &= -2\left(x-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{k^2}{2}+3k+4 \end{aligned}$$

と平方完成できるから、放物線 C の頂点は、

$$\left(\frac{k}{2}, \frac{k^2}{2}+3k+4\right)$$

と表せる。これが第 2 象限に存在するための条件は、

$$\begin{aligned} \frac{k}{2}<0 \text{ かつ } \frac{k^2}{2}+3k+4>0 \\ \Leftrightarrow k<0 \text{ かつ } \frac{1}{2}(k+4)(k+2)>0 \\ \Leftrightarrow k<-4, -2<k<0 \end{aligned}$$

である。このとき、放物線 C は頂点が第 2 象限に存在する上に凸の放物線であるから、 y は

$x=0$ で最大となり、 $x=3$ で最小となる。よって、 y は、

$$x=0 \text{ のとき、最大値 } 3k+4$$

$$x=3 \text{ のとき、最小値 } 9k-14$$

をとる。また、頂点の座標が $\left(\frac{k}{2}, \frac{k^2}{2}+3k+4\right)$ であるから、この放物線 C を x 軸方向に $-\frac{k}{2}$ 、 y

軸方向に $-\frac{k^2}{2}-3k-4$ だけ平行移動すると、原点を頂点とする放物線 $y=-2x^2$ となる。

[3]

題意で与えられた数列 $\{a_n\}$

$$2, 6, 12, 20, \cdots$$

の階差をとると、

$$4, 6, 8, \cdots$$

となり、この数列は初項 4、公差 2 の等差数列であると考えられるから、

$$a_{n+1}-a_n=2n+2$$

となる。よって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+2) \\ &= 2 + \frac{1}{2} \cdot 2(n-1)n + 2(n-1) \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

と求まり、これは $n=1$ のときも成立する。したがって、数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n k(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\} \\ &= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) - 0 \cdot 1 \cdot 2 \\ &= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

である。また、数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \frac{1}{a_n}$ で定めると、数列 $\{b_n\}$ の一般項は、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

となるから、数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

である。さらに、題意で与えられた数列 $\{c_n\}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}, \cdots$$

の一般項は、

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

であると考えられるから、数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1}-1 \end{aligned}$$

である。

〔解答〕

$$[1] \quad \text{ニ} \quad 1 \quad \text{ヌ} \quad -1 \quad \text{ネ} \quad \frac{1}{2}$$

$$[2] \quad \text{ノ} \quad 0 \quad \text{ハ} \quad \frac{2q+1}{4} \quad \text{ヒ} \quad 1$$

$$[3] \quad \text{フ} \quad \frac{3}{4} \quad \text{ヘ} \quad -\frac{5}{4} \quad \text{ホ} \quad \frac{5}{6} \quad \text{マ} \quad \frac{1}{2}$$

〔解説〕

[1]

$0 \leq p \leq 1$ より、被積分関数は

$$|x-p| = \begin{cases} p-x & (0 \leq x \leq p) \\ x-p & (p \leq x \leq 1) \end{cases}$$

となるから、 $C(p)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} C(p) &= \int_0^1 |x-p| dx \\ &= \int_0^p (p-x) dx + \int_p^1 (x-p) dx \\ &= \left[px - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^p + \left[\frac{1}{2}x^2 - px \right]_p^1 \\ &= \left(p^2 - \frac{1}{2}p^2 \right) + \left\{ \left(\frac{1}{2} - p \right) - \left(\frac{1}{2}p^2 - p^2 \right) \right\} \\ &= p^2 - p + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。この 2 次関数を平方完成すると、

$$\begin{aligned} C(p) &= p^2 - p + \frac{1}{2} \\ &= \left(p - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となるから、 $C(p)$ が最小となるのは $p = \frac{1}{2}$ のときである。

[2]

P は $p = \frac{1}{2}$ の地点に出店し、Q が $x = q$ ($\frac{1}{2} \leq x \leq 1$) の地点に出店しているので、PQ の中点を

$M\left(\frac{2q+1}{4}\right)$ とすると、M より P 側の住人は P の店に買い物に行き、M より Q 側の住人は Q

の店に買い物に行く。つまり、 $0 \leq x \leq \frac{2q+1}{4}$ の地点に住む住人は P で買い物をし、

$\frac{2q+1}{4} \leq x \leq 1$ の地点に住む住人は Q で買い物をする。

[3]

[2] より、 $D(q)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} D(q) &= \int_0^{\frac{2q+1}{4}} \left| x - \frac{1}{2} \right| dx + \int_{\frac{2q+1}{4}}^1 |x-q| dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2q+1}{4}} \left(x - \frac{1}{2} \right) dx + \int_{\frac{2q+1}{4}}^q (q-x) dx + \int_q^1 (x-q) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{2q+1}{4}} + \left[qx - \frac{1}{2}x^2 \right]_{\frac{2q+1}{4}}^q + \left[\frac{1}{2}x^2 - qx \right]_q^1 \\ &= \frac{1}{8} + \left\{ \frac{(2q+1)^2}{32} - \frac{2q+1}{8} + \frac{1}{8} \right\} + \left\{ \frac{1}{2}q^2 - \frac{2q^2+q}{4} + \frac{(2q+1)^2}{32} \right\} + \left(\frac{1}{2} - q + \frac{1}{2}q^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right) q^2 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - 1 \right) q + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{32} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{3}{4}q^2 - \frac{5}{4}q + \frac{11}{16} \end{aligned}$$

となる。この 2 次関数を平方完成すると、

$$\begin{aligned} D(q) &= \frac{3}{4}q^2 - \frac{5}{4}q + \frac{11}{16} \\ &= \frac{3}{4} \left(q - \frac{5}{6} \right)^2 + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

となるから、移動距離の合計 ($= D(q)$) が最小になるように q を決めるのであれば、

$$q = \frac{5}{6}$$

となる。これは $\frac{1}{2} \leq q \leq 1$ を満たす。また、Q が自分の店に来る顧客数を最大にするには、Q

の店に来る範囲を最大にすればよいが、 $\frac{2q+1}{4} \leq x \leq 1$ の範囲に住んでいる住人が Q の店に

買い物に行くから、 $\frac{2q+1}{4}$ を最小とすればよいことになる。ここで $\frac{1}{2} \leq q \leq 1$ より、 $\frac{2q+1}{4}$ が

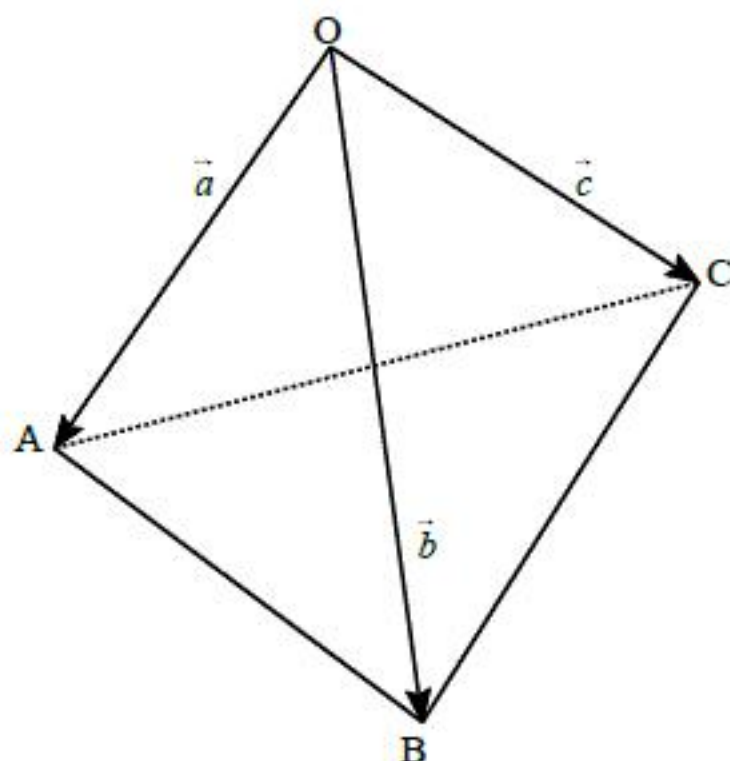
最小となる q は、

$$q = \frac{1}{2}$$

であるから、このときに Q の店に来る顧客数が最大となる。

III

[1]



点 G は $\triangle ABC$ の重心であるから、

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

[2]

点 P は平面 ABC 上の点であるので、 $\overrightarrow{AP}$ は実数 s, t を用いて、

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

と表せる。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a}) \\ &= -(s+t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \end{aligned}$$

と表せることが示された。

(証明終)

[3]

正四面体 $OABC$ の 1 辺の長さは 1 であるから、

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。したがって、 $\overrightarrow{OG}$ と $\overrightarrow{AP}$ の内積を計算すると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{3}[(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \{-(s+t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}\}] \\ &= \frac{1}{3}\left(-s-t+s+t+\frac{s+t-(s+t)+t-(s+t)+s}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるから、

$$\overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{AP}$$

となる。よって、点 P を動かすことによって、

$$\overrightarrow{OG} \perp (\text{点 } A \text{ を通る } \alpha \text{ 上の任意の直線})$$

が言え、さらに、 $\overrightarrow{AP}$ を平行移動することによって、

$$\overrightarrow{OG} \perp (\alpha \text{ 上の任意の直線})$$

が言えることが分かる。以上より、 OG は平面 ABC と垂直であることが示された。

(証明終)

[4]

[3] より、 OG は O から $\triangle ABC$ におろした垂線となるから、この長さを計算すると、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OG}| &= \sqrt{\left|\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}\right|^2} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{1+1+1+2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{3+3} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

となる。また、 $\triangle ABC$ の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

となる。したがって、四面体 $OABC$ の体積を V とすると、 $\triangle ABC$ を底面、 OG の長さを高さと考えることで、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot S \cdot OG \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} \end{aligned}$$

と求まる。