

I

[解答]

$\boxed{\text{ア}}$ $\cos 2t$	$\boxed{\text{イ}}$ $-\sin 2t$	$\boxed{\text{ウ}}$ $\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$	$\boxed{\text{エ}}$ $\frac{1}{2} \sin 3t $	$\boxed{\text{オ}}$ $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi$
$\boxed{\text{カ}}$ $-\cos t - 2$	$\boxed{\text{キ}}$ $-\sin t$	$\boxed{\text{ク}}$ $ \sin t $	$\boxed{\text{ケ}}$ $\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$	

[解説]

$Q(\cos(-2t), \sin(-2t))$ より, $Q(\cos 2t, -\sin 2t)$ である。 $P(\cos t, \sin t)$ と Q が同じ位置にあるとき,

$$\begin{aligned}\cos t &= \cos 2t \\ \Leftrightarrow \cos t &= 2\cos^2 t - 1 \\ \Leftrightarrow \cos t &= -\frac{1}{2}, 1 \\ \therefore t &= \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \quad (\because 0 < t < 2\pi)\end{aligned}$$

となる。これらは $\sin t = -\sin 2t$ を満たすので, $t = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ である。

$$S_1 = \frac{1}{2} |\cos t \cdot (-\sin 2t) - \sin t \cos 2t| = \frac{1}{2} |\sin 3t|$$

であり, S_1 は $\sin 3t = \pm 1$ のとき最大なので, $0 < 3t < 3\pi$ より,

$$\begin{aligned}3t &= \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi \\ \therefore t &= \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi\end{aligned}$$

となる。

$R(x, y)$ とすると, P と R の中点が $(-1, 0)$ となるので,

$$\begin{aligned}\left(\frac{x + \cos t}{2}, \frac{y + \sin t}{2}\right) &= (-1, 0) \\ \therefore (x, y) &= (-\cos t - 2, -\sin t)\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{1}{2} |\cos t \cdot (-\sin t) - \sin t \cdot (-\cos t - 2)| \\ &= |\sin t|\end{aligned}$$

となる。 $S_1 = S_2$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} |\sin 3t| &= |\sin t| \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} |3\sin t - 4\sin^3 t| &= |\sin t| \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} (3 - 4\sin^2 t) &= \pm 1 \quad (\because \sin t \neq 0) \\ \Leftrightarrow \sin^2 t &= \frac{1}{4} \quad (\because \sin^2 t \leq 1) \\ \Leftrightarrow \sin t &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \quad (\because 0 < t < \pi)\end{aligned}$$

である。

II

〔解答〕

[1] ☐ $\log x + 1$

☐ $x \log x - x$

[2] ☐ 減少

☐ $\frac{1}{2}(1 + \log 2)$

☐ 増加

☐ $\frac{1}{2}$

☐ $\log\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right)$

☐ $\frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$

〔解説〕

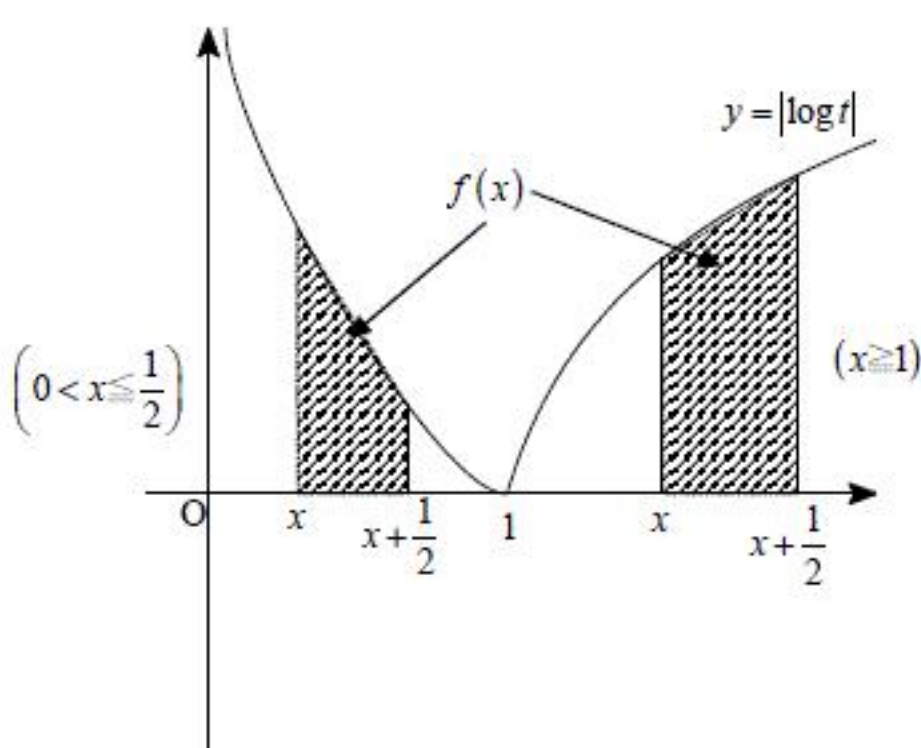
[1]

$$\begin{aligned}(x \log x)' &= \log x + x \cdot \frac{1}{x} \\ &= \log x + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \log x dx &= \int x' \log x dx \\ &= x \log x - \int x (\log x)' dx \\ &= x \log x - x + C\end{aligned}$$

である。

[2]



上図より、 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ で $f(x)$ は単調減少であり、また、

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_x^{x+\frac{1}{2}} (-\log t) dt \\ &= [-t \log t + t]_x^{x+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right) \log\left(x + \frac{1}{2}\right) + x \log x\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + 0 \\ &= \frac{1}{2} (1 + \log 2)\end{aligned}$$

である。また、図より $x \geq 1$ で $f(x)$ は単調増加であり、

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_x^{x+\frac{1}{2}} \log t dt \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right) \log\left(x + \frac{1}{2}\right) - x \log x - \frac{1}{2} \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right) \log\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x + \frac{1}{2} \log x - \frac{1}{2} \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{2x}\right) + \frac{1}{2} \log x - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} + \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{1}{2x}\right) + \frac{1}{2} \log x - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

と計算できる。よって、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} = e$ に注意すれば、

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\log x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x}}{\log x} + \frac{\frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{1}{2x}\right)}{\log x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \log x} \right\} \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

と求まる。 $\frac{1}{2} < x < 1$ のとき、

$$f(x) = \int_x^1 (-\log t) dt + \int_1^{x+\frac{1}{2}} \log t dt$$

より、

$$\begin{aligned}f'(x) &= -(-\log x) + \log\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ &= \log\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right)\end{aligned}$$

となる。 $f'(x) = 0$ のとき

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{1}{2}x &= 1 \\ \therefore x &= \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \left(\because \frac{1}{2} < x < 1 \right)\end{aligned}$$

なので、増減表は以下のようになる。

x	$\left(\frac{1}{2}\right)$	...	$\frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$	...	(1)
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

増減表より、 $x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$ で最小値をとる。

III

[解答]

$$[1] \quad \boxed{\text{ツ}} 4 \quad \boxed{\text{テ}} -4 \quad \boxed{\text{ト}} -1 \quad \boxed{\text{ナ}} -\frac{1}{4} \quad \boxed{\text{ニ}} 1$$

$$[2] \quad \boxed{\text{ヌ}} n2^{n-1} \quad \boxed{\text{ネ}} -2^n(n-1) \quad \boxed{\text{ノ}} -n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \boxed{\text{ハ}} (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

[解説]

[1]

ハミルトン・ケーリーの定理より

$$\begin{aligned} A^2 - 4A + (3-a)E &= 0 \\ \Leftrightarrow A^2 &= 4A + (a-3)E \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} A^3 - 12A &= A \cdot A^2 - 12A \\ &= (a+1)A + 4(a-3)E \end{aligned}$$

これが、 kE (k : 実数) に等しいとすると、 A が単位行列の実数倍ではないことから、

$$\begin{aligned} a+1 &= 0 \\ \therefore a &= -1 \end{aligned}$$

であり、①より

$$A^2 = 4A - 4E \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。このとき、 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ となり、 $3 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 4 \neq 0$ であるから、逆行列 A^{-1} が存在する

ので、②の両辺に A^{-1} をかけて

$$\begin{aligned} A &= 4E - 4A^{-1} \\ \therefore A^{-1} &= -\frac{1}{4}A + E \end{aligned}$$

となる。

[2]

$$\begin{aligned} A^n &= \{(A - 2E) + 2E\}^n \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2E \right\}^n \end{aligned}$$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと、

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

となる。よって、

$$B^m = 0 \quad (m \geq 2) \quad \cdots (*)$$

となるので、 $B^0, (2E)^0$ は E を表すものとして、

$$\begin{aligned} A^n &= (B + 2E)^n \\ &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k B^{n-k} (2E)^k \\ &= {}_nC_{n-1} B (2E)^{n-1} + {}_nC_n (2E)^n \quad (\because (*)) \\ &= n(A - 2E) \cdot 2^{n-1} + 2^n E \quad (\because B = A - 2E) \\ &= n2^{n-1} A - 2^n(n-1)E \end{aligned}$$

となる。また、[1] の結果より

$$\begin{aligned} A^{-n} &= (A^{-1})^n \\ &= \left(-\frac{1}{4}A + E \right)^n \\ &= \left(-\frac{1}{4} \right)^n \{ (A - 2E) - 2E \}^n \\ &= \left(-\frac{1}{4} \right)^n (B - 2E)^n \end{aligned}$$

であるから、同様にして

$$\begin{aligned} A^{-n} &= \left(-\frac{1}{4} \right)^n \{ {}_nC_{n-1} B (-2E)^{n-1} + {}_nC_n (-2E)^n \} \\ &= -n \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} A + (n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^n E \end{aligned}$$

となる。

IV

〔解答〕

$$[1] \quad \boxed{\text{ヒ}} \ a \qquad \boxed{\text{フ}} \ a^2 \qquad \boxed{\text{ヘ}} \ \frac{1}{3}a^3$$

$$[2] \quad \boxed{\text{ホ}} \ -\frac{1}{2}a \qquad \boxed{\text{マ}} \ \frac{1}{4}a^2 \qquad \boxed{\text{ミ}} \ \frac{1}{4}a \qquad \boxed{\text{ム}} \ -\frac{1}{2}a^2$$

$$[3] \quad \boxed{\text{メ}} \ -8x^2 \qquad \boxed{\text{モ}} \ 0$$

〔解説〕

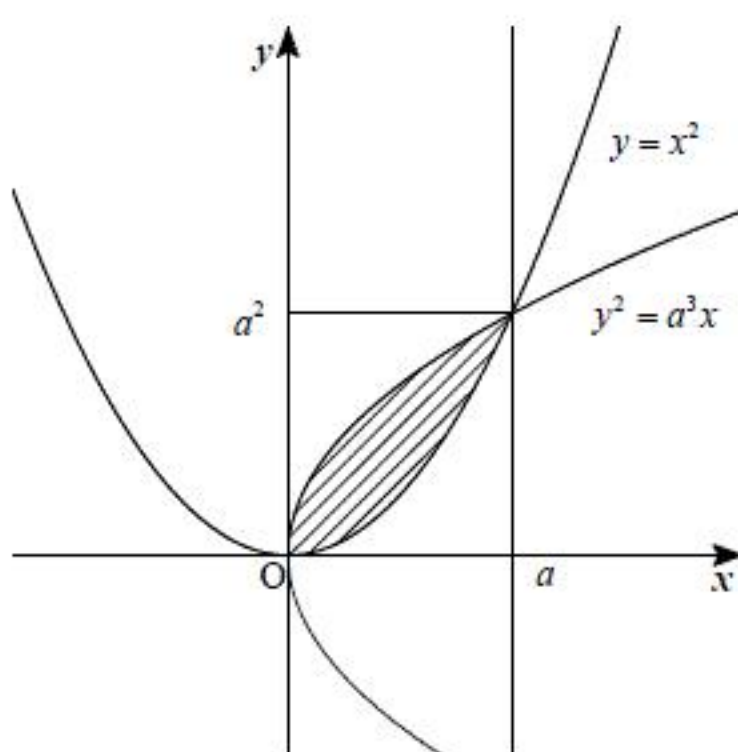
[1]

$y = x^2$ を $y^2 = a^3x$ に代入して

$$x^4 = a^3x$$

$$\therefore x = 0, a$$

となる。 $a \neq 0$ であるから、原点以外の共有点は (a, a^2) である。



求める面積は、上図の斜線部であり、 C_2 の $y \geq 0$ の部分は $y = a^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}$ となるので、

$$\begin{aligned} \int_0^a \left(a^{\frac{3}{2}}\sqrt{x} - x^2 \right) dx &= \left[\frac{2}{3}(ax)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^a \\ &= \frac{1}{3}a^3 \end{aligned}$$

である。

[2]

C_1 の (t, t^2) における接線は、 $(x^2)' = 2x$ より

$$y = 2t(x - t) + t^2$$

$$\Leftrightarrow y = 2tx - t^2$$

となる。これを l とし、 C_2 と連立して

$$(2tx - t^2)^2 = a^3x$$

$$\Leftrightarrow 4t^2x^2 - (a^3 + 4t^3)x + t^4 = 0 \qquad \cdots \textcircled{1}$$

となる。①が x について重解をもてばよいので、①の判別式を D とするとき、

$$D = (a^3 + 4t^3)^2 - 16t^6 = 0$$

$$\therefore t = -\frac{1}{2}a$$

より、点 $P\left(-\frac{1}{2}a, \frac{1}{4}a^2\right)$ である。改めて①を解くと

$$\begin{aligned} x &= -\frac{-(a^3 + 4t^3)}{8t^2} \\ &= \frac{1}{4}a \end{aligned}$$

となり、これを l の式に代入して、 $y = -a \cdot \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{2}a^2$ となるので、点 $Q\left(\frac{1}{4}a, -\frac{1}{2}a^2\right)$ で

ある。

[3]

PQ の中点を $R(X, Y)$ とおくと

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a\right) \\ &= -\frac{1}{8}a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2\right) \\ &= -\frac{1}{8}a^2 \end{aligned}$$

であり、 $a > 0$ のとき X は $X < 0$ を動く。また、 $a = -8X$ より $Y = -8X^2$ だから、軌跡は放物線 $y = -8x^2$ の $x < 0$ の部分である。