

(第3時限：100分)

2011年度 ⑤

# 数 学 問 題

(理 系)

(全4ページ)

## 注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の  にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

## 数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の  にあてはまる適当なものを、  
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ 座標平面において、原点  $O$  を中心とする半径  $1$  の円周上を動く  $2$  点  $P, Q$  がある。時刻  $t$  における  $P$  の座標は、 $(\cos t, \sin t)$  である。 $Q$  は  $t=0$  において  $P$  と同じ位置にある。また、 $Q$  は  $P$  の  $2$  倍の速さで  $P$  と逆回りに動いている。

時刻  $t$  における  $Q$  の座標は、 $(\text{ア}, \text{イ})$  であり、 $0 < t < 2\pi$  の範囲で  $P$  と  $Q$  が同じ位置にあるのは、 $t = \text{ウ}$  のときである。 $S_1$  を  $\triangle OPQ$  の面積とする。ただし、 $O, P, Q$  が一直線上にあるときは  $S_1 = 0$  と定める。 $S_1$  を  $t$  を用いて表すと、 $\text{エ}$  であり、これが  $0 < t < \pi$  の範囲で最大になるのは、 $t = \text{オ}$  のときである。

点  $(-1, 0)$  に関して  $P$  と対称な点を  $R$  とする。時刻  $t$  における  $R$  の座標は、 $(\text{カ}, \text{キ})$  である。 $S_2$  を  $\triangle OPR$  の面積とする。ここでも、 $O, P, R$  が一直線上にあるときは  $S_2 = 0$  と定める。 $S_2$  を  $t$  を用いて表すと、 $\text{ク}$  であり、 $0 < t < \pi$  の範囲で、 $S_1 = S_2$  であるのは、 $t = \text{ケ}$  のときである。

II  ,  には適当な語句を入れなさい。また、必要なら

$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$  を使いなさい。

[1]  $(x \log x)' = \text{コ}$  ,  $\int \log x \, dx = \text{サ} + C$  である。

(ただし  $C$  は積分定数とする。)

[2]  $x > 0$  のとき

$$f(x) = \int_x^{x+\frac{1}{2}} |\log t| \, dt$$

とする。

$0 < x \leq \frac{1}{2}$  のとき,  $f(x)$  は単調に  し,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \text{ス}$$

である。 $x \geq 1$  のとき,  $f(x)$  は単調に  し,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\log x} = \text{ソ}$$

であり,  $\frac{1}{2} < x < 1$  のときは,  $f'(x) = \text{タ}$  である。

$x > 0$  で  $f(x)$  が最小になるのは,  $x = \text{チ}$  のときである。

Ⅲ  $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  とし,  $A^3 - 12A$  は単位行列  $E$  の実数倍であるとする。

(注:  $\boxed{\phantom{00}}$  には全て,  $a$  を含まない, 数値または  $n$  の式を入れなさい。)

(1)  $A^2 = \boxed{\text{ツ}} A + \boxed{\text{テ}} E$

であり,  $a = \boxed{\text{ト}}$  である。  $A$  は逆行列を持ち,

$$A^{-1} = \boxed{\text{ナ}} A + \boxed{\text{ニ}} E$$

である。

(2)  $n$  を自然数とする。  $A^n = \{(A - 2E) + 2E\}^n$  を展開して,

$$A^n = \boxed{\text{ヌ}} A + \boxed{\text{ネ}} E$$

を得る。また,

$$(A^n)^{-1} = \boxed{\text{ノ}} A + \boxed{\text{ハ}} E$$

である。

IV  $a > 0$  とする。座標平面において 2 曲線

$$C_1 : y = x^2$$

$$C_2 : y^2 = a^3 x$$

を考える。

[1] 2 曲線  $C_1$  と  $C_2$  は原点以外に共有点  $(\boxed{\text{ヒ}}, \boxed{\text{フ}})$  を持ち、2 曲線で囲まれた図形の面積は  $\boxed{\text{ヘ}}$  である。

[2] 2 曲線  $C_1$  と  $C_2$  の両方に接する直線を  $l$  とする。 $l$  と曲線  $C_1$  は、  
点  $P(\boxed{\text{ホ}}, \boxed{\text{マ}})$  で接しており、 $l$  と曲線  $C_2$  は、  
点  $Q(\boxed{\text{ミ}}, \boxed{\text{ム}})$  で接している。

[3]  $a > 0$  の範囲で  $a$  が変化するとき、線分  $PQ$  の中点の軌跡は曲線  $y = \boxed{\text{メ}}$  の  $x < \boxed{\text{モ}}$  の部分である。