

I

【解答】

$$\text{ア } \sqrt{5} \quad \text{イ } 2 \quad \text{ウ } \frac{2\sqrt{5-m^2}}{|4-m^2|} \quad \text{エ } \frac{m}{4-m^2}$$

$$\text{オ } \frac{4}{4-m^2} \quad \text{カ } 4 \quad \text{キ } -1 \quad \text{ク } -4$$

【解説】

$$\text{直線 } y = mx + 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{双曲線 } 4x^2 - y^2 = 4 \quad \cdots \textcircled{3}$$

の共有点を求めるために、②を③に代入すると、

$$4x^2 - (mx + 1)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (4 - m^2)x^2 - 2mx - 5 = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

という方程式が得られる。この x の方程式の実数解が共有点の x 座標となる。まず、方程式の実数解が 2 つ存在するためには④が 2 次方程式でなければならないので、

$$4 - m^2 \neq 0$$

$$\therefore |m| \neq 2$$

が得られる。この条件のもとで④が 2 つの実数解をもつ条件は、④の判別式 D が $D > 0$ を満たすことであるから、

$$\frac{D}{4} = m^2 - (4 - m^2)(-5) = -4(m^2 - 5) > 0$$

$$\therefore m^2 < 5$$

$$\therefore |m| < \sqrt{5}$$

となる。

④の方程式の解は

$$x = \frac{m \pm 2\sqrt{5-m^2}}{4-m^2}$$

であるから、2 つの共有点の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) とおくと、

$$x_1 + x_2 = \frac{2m}{4-m^2} \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{4\sqrt{5-m^2}}{|4-m^2|} \quad \cdots \textcircled{6}$$

である。2 つの共有点と原点を頂点とする三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-x_1) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x_2 = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

と表せるので、⑥より、

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{5-m^2}}{|4-m^2|} = \frac{2\sqrt{5-m^2}}{|4-m^2|}$$

となる。また、2 共有点の中点 $P(\alpha, \beta)$ について考えると、まず⑤より

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2m}{4-m^2} = \frac{m}{4-m^2}$$

である。P は直線②上にあるから、

$$\beta = m\alpha + 1 = m \cdot \frac{m}{4-m^2} + 1 = \frac{4}{4-m^2}$$

である。

表式より $\beta \neq 0$ であるから、

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{4}$$

$$\therefore m = \frac{4\alpha}{\beta} \quad \cdots \textcircled{7}$$

である。まず軌跡の方程式を求めるために、これを β の表式に代入すると、

$$\beta = \frac{4}{4 - \left(\frac{4\alpha}{\beta}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2 - \beta^2 + \beta = 0$$

であるから、軌跡の方程式は

$$4x^2 - y^2 + y = 0 \quad \cdots \textcircled{8}$$

となる。

最後に、P の動く範囲を求める。⑦を①に代入すると、

$$\left| \frac{4\alpha}{\beta} \right| < \sqrt{5} \Leftrightarrow -\sqrt{5} < \frac{4\alpha}{\beta} < \sqrt{5} \quad \cdots \textcircled{9}$$

$$\left| \frac{4\alpha}{\beta} \right| \neq 2 \Leftrightarrow \beta \neq \pm 2\alpha$$

となる。⑨は、 $\beta > 0$ のとき

$$\beta > \frac{4}{\sqrt{5}}\alpha \quad \text{かつ} \quad \beta > -\frac{4}{\sqrt{5}}\alpha$$

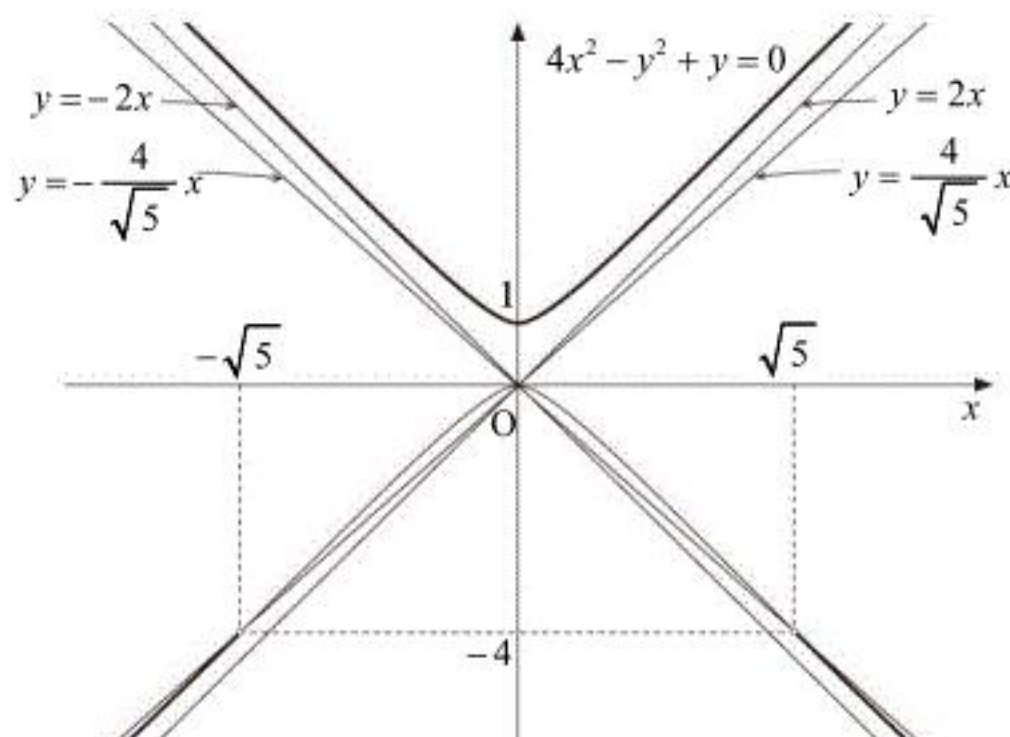
であり、 $\beta < 0$ のとき

$$\beta < \frac{4}{\sqrt{5}}\alpha \quad \text{かつ} \quad \beta < -\frac{4}{\sqrt{5}}\alpha$$

であるから、P の存在範囲は結局

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 + y = 0 \\ y > \frac{4}{\sqrt{5}}x, y > -\frac{4}{\sqrt{5}}x \quad (y > 0) \\ y < \frac{4}{\sqrt{5}}x, y < -\frac{4}{\sqrt{5}}x \quad (y < 0) \\ y \neq \pm 2x \end{cases}$$

を満たす線上となり、これを図示すると下図のようになる。



放物線⑧の漸近線の傾きは ± 2 なので、 $y = \pm 2x$ とは原点以外で交わらない。よって、点 P が存在するのは $4x^2 - y^2 + y = 0$ のうち、

$$y \geq 1 \text{ の部分} \quad \text{と} \quad y < -4 \text{ の部分} \quad (\text{上図の太線部})$$

である。

II

【解答】

$$\text{ケ } a \quad \text{コ } -b \quad \text{サ } -\frac{b}{a^2+b^2} \quad \text{シ } \frac{a}{a^2+b^2}$$

〔1〕

$$\text{ス } -1 \quad \text{セ } \sqrt{3} \quad \text{ソ } 2 \quad \text{タ } 0$$

〔2〕

$$\text{チ } \frac{5}{2}|b| \quad \text{ツ } \frac{5}{4}$$

【解説】

$$A = \begin{pmatrix} c & d \\ b & a \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$JA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & -a \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$AJ = \begin{pmatrix} c & d \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ a & -b \end{pmatrix}$$

である。 $JA = AJ$ より、各成分を比較して、

$$c = a, d = -b$$

が得られ、

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

であることがわかる。よって、

$$\det A = a \cdot a - (-b) \cdot b = a^2 + b^2 \neq 0 \quad (\text{問題分の条件より})$$

なので、行列 A には逆行列 A^{-1} が存在し、

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = -\frac{b}{a^2+b^2} J + \frac{a}{a^2+b^2} E$$

のように表すことができる。

〔1〕

上と同様にして行列 A も

$$A = bJ + aE$$

のように表すことができるから、

$$A^2 = b^2 J^2 + 2abJ + a^2 E$$

となる。ここで、

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

であることから、

$$A^2 = b^2 (-E) + 2abJ + a^2 E = 2abJ + (a^2 - b^2) E$$

となる。さらに A を掛ければ

$$\begin{aligned} A^3 &= \{2abJ + (a^2 - b^2) E\} (bJ + aE) \\ &= 2ab^2 J^2 + (3a^2 b - b^3) J + (a^3 - ab^2) E \\ &= b(3a^2 - b^2) J + a(a^2 - 3b^2) E \end{aligned}$$

となるから、 $A^3 = 8E$ となるとき、係数を比較することで、

$$\begin{cases} b(3a^2 - b^2) = 0 & \dots \text{①} \\ a(a^2 - 3b^2) = 8 & \dots \text{②} \end{cases}$$

が成り立つことがわかる。①について場合分けする。

〔i〕 $b = 0$ のとき

②より

$$a^3 = 8$$

$$\therefore a = 2$$

である。

〔ii〕 $3a^2 - b^2 = 0 (\Leftrightarrow b^2 = 3a^2)$ のとき

②より

$$a(a^2 - 3 \cdot 3a^2) = 8 \Leftrightarrow a^3 = -1$$

$$\therefore a = -1$$

である。またこのとき、

$$b^2 = 3 \cdot (-1)^2 = 3$$

$$\therefore b = \pm \sqrt{3}$$

である。

以上より、 $A^3 = 8E$ となるのは、

$$(a, b) = (-1, \sqrt{3}), (-1, -\sqrt{3}), (2, 0)$$

の場合である。

〔2〕

点 Q は一次変換 A による点 $P(2, 1)$ の像であるから、

$$\begin{aligned} \overline{OQ} &= A \overline{OP} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a - b \\ a + 2b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

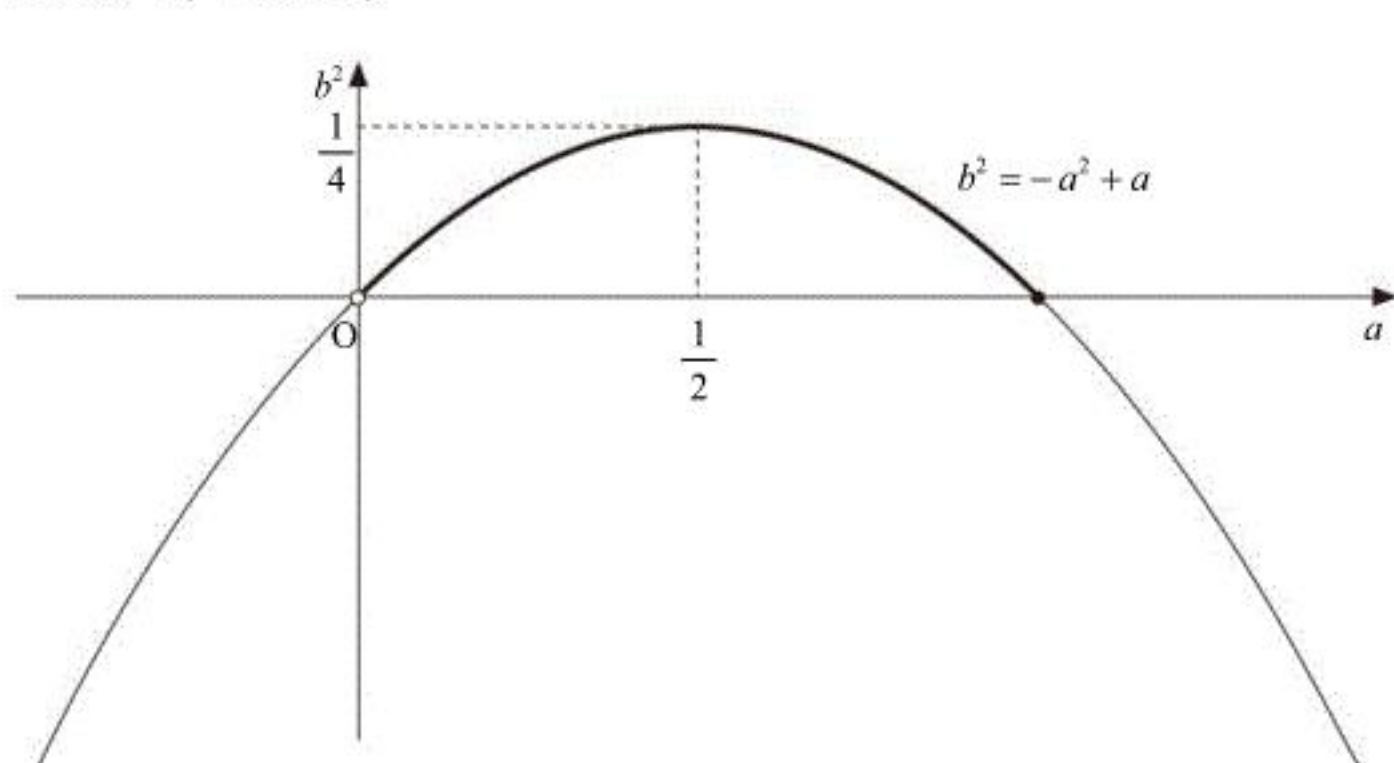
である。よって $\triangle OPQ$ の面積 S は、

$$S = \frac{1}{2} |2 \cdot (a + 2b) - 1 \cdot (2a - b)| = \frac{5}{2} |b|$$

である。また、 $a^2 + b^2 = a (\neq 0)$ のとき、

$$b^2 = -a^2 + a = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \quad (\geq 0)$$

となるから、下図より、



$$0 \leq b^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$\therefore 0 \leq |b| \leq \frac{1}{2}$$

であるから、 S のとりうる値の範囲は

$$0 \leq S \leq \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

である。

Ⅲ

〔解答〕

$$\begin{array}{ccccccc} \text{テ} & \frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{n+1} & \text{ト} & -\frac{(\alpha-\beta)^{n+1}}{n+1} & \text{ナ} & -\frac{k}{n-k+1} & \text{ニ} & (-1)^k \frac{k!(n-k)!}{n!} \\ \\ \text{ヌ} & \frac{k}{n-k+1} & \text{ネ} & m+2 & \text{ノ} & m & \text{ハ} & m \\ \\ \text{ヒ} & m+1 & \text{フ} & m & & & & \end{array}$$

〔解説〕

$I_{n,0}, I_{n,n}$ を計算すると

$$\begin{aligned} I_{n,0} &= \left[\frac{1}{n+1} (x-\alpha)^{n+1} \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{n+1} \\ I_{n,n} &= \left[\frac{1}{n+1} (x-\beta)^{n+1} \right]_{\alpha}^{\beta} = -\frac{(\alpha-\beta)^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

となる。また、部分積分を用いて $I_{n,k}$ を計算すると、

$$\begin{aligned} I_{n,k} &= \left[\frac{1}{n-k+1} (x-\alpha)^{n-k+1} (x-\beta)^k \right]_{\alpha}^{\beta} - \frac{k}{n-k+1} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^{n-k+1} (x-\beta)^{k-1} dx \\ &= -\frac{k}{n-k+1} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^{n-(k-1)} (x-\beta)^{k-1} dx \\ &= -\frac{k}{n-k+1} I_{n,k-1} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} I_{n,k} &= \left(-\frac{k}{n-k+1} \right) I_{n,k-1} \\ &= \left(-\frac{k}{n-k+1} \right) \left(-\frac{k-1}{n-k+2} \right) I_{n,k-2} \\ &= \left(-\frac{k}{n-k+1} \right) \left(-\frac{k-1}{n-k+2} \right) \cdots \left(-\frac{1}{n} \right) I_{n,0} \\ &= (-1)^k \frac{k!(n-k)!}{n!} I_{n,0} \end{aligned}$$

が成り立つ。

また $1 \leq k \leq n$ より、 $\frac{k}{n-k+1} > 0$ であるので

$$H_{n,k} = \left| \frac{I_{n,k}}{I_{n,0}} \right| = \left| \left(-\frac{k}{n-k+1} \right) \cdot \frac{I_{n,k-1}}{I_{n,0}} \right| = \frac{k}{n-k+1} H_{n,k-1}$$

が成り立つ。よって、 $H_{2m+1,k-1} < H_{2m+1,k}$ となる m と k の条件は

$$\frac{k}{(2m+1)-k+1} > 1 \Leftrightarrow k > m+1$$

であるので、 k は整数より条件は

$$k \geq m+2$$

と書き換えられる。

同様にして、 $H_{2m+1,k-1} > H_{2m+1,k}$ となる m と k の条件は

$$\frac{k}{(2m+1)-k+1} < 1 \Leftrightarrow k < m+1$$

であり、 k は整数より条件は

$$k \leq m$$

と書き換えられる。よって

$$\begin{aligned} H_{2m+1,0} &> H_{2m+1,1} > \cdots > H_{2m+1,m-1} > H_{2m+1,m} \\ H_{2m+1,m+1} &< H_{2m+1,m+2} < \cdots < H_{2m+1,2m+1} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで

$$H_{2m+1,m+1} = \left| \left(-\frac{m+1}{2m+1-(m+1)+1} \right) \cdot \frac{I_{2m+1,m}}{I_{2m+1,0}} \right| = H_{2m+1,m}$$

なので、以上より、 $l=m$ または $l=m+1$ のときに $H_{2m+1,l}$ は最小となる。

$H_{2m,l}$ の最小を求めるのも同様にすればよい。

$$H_{2m,k} = \frac{k}{2m-k+1} H_{2m,k-1}$$

であるから、 $H_{2m,k-1} < H_{2m,k}$ となる m と k の条件は

$$\frac{k}{2m-k+1} > 1 \Leftrightarrow k > m + \frac{1}{2}$$

$$\therefore k \geq m+1$$

となり、 $H_{2m,k-1} > H_{2m,k}$ となる m と k の条件は

$$\frac{k}{2m-k+1} < 1 \Leftrightarrow k < m + \frac{1}{2}$$

$$\therefore k \leq m$$

となる。よって

$$H_{2m,0} > H_{2m,1} > \cdots > H_{2m,m-1} > H_{2m,m} < H_{2m,m+1} < \cdots < H_{2m,2m}$$

が成り立つ。以上より、 $l=m$ のとき $H_{2m,l}$ は最小となる。

IV

〔解答〕

$$\begin{array}{ccccccc} \text{ヘ} & 1 & \text{ホ} & 9 & \text{マ} & \frac{1}{12} & \text{ミ} & \frac{1}{108} \\ & & & & & & & \\ \text{ム} & 154 & \text{メ} & \frac{77}{108} & \text{モ} & \frac{73}{27} & & \end{array}$$

〔解説〕

(1)

- Aのみに所属する人の数を a とする。
- Bのみに所属する人の数を b とする。
- Cのみに所属する人の数を c とする。
- A, Bに所属し, Cに所属していない人の数を d とする。
- B, Cに所属し, Aに所属していない人の数を e とする。
- C, Aに所属し, Bに所属していない人の数を f とする。
- A, B, Cに所属する人の数を g とする。

条件より

$$\begin{cases} a+d+f+g=6 \\ b+d+e+g=6 \\ c+e+f+g=6 \\ d+g=3 \\ e+g=4 \\ f+g=4 \\ g=2 \end{cases}$$

が成り立つ。これらを解いて

$$a=1, b=1, c=0, d=1, e=2, f=2, g=2$$

を得る。よってAのみに所属する人は1人である。

(2)

(1)より, A, B, Cのいずれかに所属する人は

$$a+b+c+d+e+f+g=9 \text{ [人]}$$

である。

(3)

A, Bに所属している人は, $d+g=3$ [人]いる。Aの代表にこの3人のうちの1人が選ばれる確率は,

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

である。また, 同じ人がBの代表者になる確率は,

$$\frac{1}{6}$$

である。Cの代表は誰が選ばれてもよいから, 求める確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{12}$$

である。

(4)

A, B, Cに所属している人は2人いるから, (3)と同様に考えて, 1人がA, B, Cの代表者を兼ねる確率は

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{108}$$

である。

(5)

代表者が2人となるような選び方を求める。

[1] A, Bの代表者が同じで, Cだけ異なる場合

A, Bに所属し, Cに所属していない人がA, Bの代表者である場合は1通りあり, このときCの代表者の選び方は6通りある。また, A, B, Cに所属している人がA, Bの代表者である場合は2通りあり, このときCの代表者の選び方は5通りある。よって

$$5 \times 2 + 6 \times 1 = 16 \text{ [通り]}$$

である。

[2] B, Cの代表者が同じで, Aだけ異なる場合

B, Cに所属し, Aに所属していない人がB, Cの代表者である場合は2通りあり, このときAの代表者の選び方は6通りある。また, A, B, Cに所属している人がB, Cの代表者である場合も2通りあり, このときAの代表者の選び方は5通りある。よって

$$5 \times 2 + 6 \times 2 = 22 \text{ [通り]}$$

である。

[3] C, Aの代表者が同じで, Bだけ異なる場合

C, Aに所属し, Bに所属していない人がC, Aの代表者である場合は2通りあり, このときBの代表者の選び方は6通りある。A, B, Cに所属している人がC, Aの代表者である場合も2通りあり, このときBの代表者の選び方は5通りある。よって

$$5 \times 2 + 6 \times 2 = 22 \text{ [通り]}$$

である。

以上より代表者が2人となるような選び方は

$$16 + 22 + 22 = 60 \text{ [通り]}$$

である。さて, A, B, Cの代表者の選び方は

$$6^3 = 216 \text{ [通り]}$$

であるので, A, B, Cの代表者がすべて異なる人になる選び方は

$$216 - 2 - 60 = 154 \text{ [通り]}$$

である。

(6)

(5)より A, B, Cの代表者がすべて異なる人になる確率は

$$\frac{154}{216} = \frac{77}{108}$$

である。

(7)

代表者が2人となる確率は

$$1 - \left(\frac{1}{108} + \frac{77}{108} \right) = \frac{30}{108} = \frac{15}{54}$$

であるから, 代表者の人数の期待値は

$$1 \times \frac{1}{108} + 2 \times \frac{15}{54} + 3 \times \frac{77}{108} = \frac{292}{108} = \frac{73}{27}$$

と求まる。