

【解答】

ア	3	イ	3	ウ	12
エ	2	オ	4	カ	$\frac{7}{9}$
キ	$\sqrt{2}$	ク	1	ケ	2
コ	3	サ	$\frac{17}{108}$	シ	t^3-4t^2+4t+1
ス	1	セ	3	ソ	$\frac{59}{27}$

【解説】

[1]

$$x=\frac{\sqrt{13}+1}{2} \text{ を変形して}$$

$$2x-1=\sqrt{13}$$

となる。この両辺を 2 乗して整理すると

$$x^2=x+3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。①を繰り返し利用することにより

$$x^2-x=(x+3)-x=3$$

$$\begin{aligned} x^3-4x &= x(x+3)-4x \\ &= x^2-x \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4-7x &= (x+3)^2-7x \\ &= x^2-x+9 \\ &= (x+3)-x+9 \\ &= 12 \end{aligned}$$

となる。

[2]

a, b, c はサイコロの目なので, 1 から 6 までの整数である。2 つの放物線 $y=ax^2+bx+2, y=2x^2+ax+b$ の交点の x 座標は方程式

$$ax^2+bx+2=2x^2+ax+b$$

すなわち

$$(a-2)x^2+(b-a)x+(2-b)=0$$

の解である。これが異なる 2 つの実数解をもてばよいので

$$a-2 \neq 0$$

かつ, 判別式を D として

$$\begin{aligned} D &= a^2+2ab+b^2-8a-8b+16 \\ &= (a+b)^2-8(a+b)+16 \\ &= (a+b-4)^2 > 0 \end{aligned}$$

となる。すなわち

$$a \neq 2, \quad a+b \neq 4$$

である。この条件を満たすサイコロの目 (a, b) の組合せを考えると

$$a=1, 3 \text{ に対して } b \text{ の値がそれぞれ } 5 \text{ 通り}$$

$$a=4, 5, 6 \text{ に対して } b \text{ の値がそれぞれ } 6 \text{ 通り}$$

存在する。したがって 2 つの放物線 $y=ax^2+bx+2, y=2x^2+ax+b$ が共有点をもつ確率は

$$\frac{2 \cdot 5+3 \cdot 6}{6^2}=\frac{28}{36}=\frac{7}{9}$$

となる。

$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ は中心 (a, b) , 半径 c の円なので, これが直線 $y=x$ と共有点をもたないとき, 点 (a, b) と直線 $y=x$ の距離について

$$\frac{|a-b|}{\sqrt{1^2+1^2}} > c$$

すなわち

$$|a-b| > \sqrt{2}c$$

が成り立つ。 $|a-b|$ がとりうる値は 0, 1, 2, 3, 4, 5 なので

$$\sqrt{2}c < 5$$

$$c < \frac{5}{\sqrt{2}} < \frac{5}{1.4} = 3.5 \cdots$$

となる。したがって $c=1, 2, 3$ である。

[1] $c=1$ のとき

$$|a-b| > \sqrt{2} \simeq 1.4 \cdots \quad \text{より } |a-b| \geq 2 \text{ となる。これを満たす } (a, b) \text{ の組は } 20 \text{ 通り。}$$

[2] $c=2$ のとき

$$|a-b| > 2\sqrt{2} \simeq 2.8 \cdots \quad \text{より } |a-b| \geq 3 \text{ となる。これを満たす } (a, b) \text{ の組は } 12 \text{ 通り。}$$

[3] $c=3$ のとき

$$|a-b| > 3\sqrt{2} \simeq 4.2 \cdots \quad \text{より } |a-b| \geq 5 \text{ となる。これを満たす } (a, b) \text{ の組は } 2 \text{ 通り。}$$

以上, [1] から [3] より円 $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ と直線 $y=x$ が共有点をもたない確率は

$$\frac{20+12+2}{6^3}=\frac{17}{108}$$

となる。

[3]

$2^x=t$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= 8^x-4^{x+1}+2^{x+2}+1 \\ &= (2^x)^3-4 \cdot (2^x)^2+2^2 \cdot 2^x+1 \\ &= t^3-4t^2+4t+1 \end{aligned}$$

となる。 $-3 \leq x \leq 1$ より $\frac{1}{8} \leq t \leq 2$ であり

$$g(t)=t^3-4t^2+4t+1$$

とすると,

$$g'(t)=3t^2-8t+4=(3t-2)(t-2)$$

であり, $g'(t)=0$ のとき $t=\frac{2}{3}, 2$ となる。増減表は次のようになる。

t	$\frac{1}{8}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$g(t)$ は $t=\frac{2}{3}$ のとき最大値 $\frac{59}{27}$ をとる。 $2^x=t$ より $x=\log_2 t$ なので, $t=\frac{2}{3}$ のとき

$$x=\log_2 \frac{2}{3}=1-\log_2 3$$

となる。

II

〔解答〕

タ	729	チ	1331	ツ	1061	テ	602
ト	729	ナ	0.55	ニ	182.05	ヌ	172

〔解説〕

商品 S の価格は、3 年間下落を続けると

$$1000 \times (0.9)^3 = 729 \text{ 円}$$

になる。また、3 年間上昇を続けると

$$1000 \times (1.1)^3 = 1331 \text{ 円}$$

になる。年利率 2% の複利で 1000 円を預金すると、3 年後には

$$1000 \times (1.02)^3 = 1061.2\cdots, \text{ 四捨五入して } 1061 \text{ 円}$$

になる。商品 S の 3 年後の価格が(チ)1331 円になる確率を p とすると、3 年後における商品 S の価格の期待値は

$$1331p + 729(1-p) = 602p + 729$$

である。この 3 年後における商品 S の価格の期待値が(ツ)1061 円になるのは

$$602p + 729 = 1061$$

$$p = 0.551\cdots, \text{ 四捨五入して } p = 0.55$$

のときである。

3 年後に商品 C の価格が 0 円になる確率は $1-p=0.45$ であり、331 円になる確率は $p=0.55$ なので、3 年後における商品 C の価格の期待値は

$$0 \times 0.45 + 1 \times 0.55 = 182.05 \text{ 円}$$

となる。ナデシコさんが銀行に x 円預けたとすると、3 年後の残高は $x(1.02)^3$ 円となる。これが(ニ)182.05 円以上になるためには

$$x(1.02)^3 \geq 182.05$$

$$x \geq \frac{182.05}{(1.02)^3} = \frac{182.05}{1.061208} = 171.5\cdots$$

となる。ゆえに、少なくとも 172 円を銀行に預けておく必要がある。

Ⅲ

[1]

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$, $a_0 = a$ より, $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n a$ となる。

ここで

$$H_0 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a_0 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}a$$

$$W_0 = \sqrt{2}a_0 = \sqrt{2}a$$

である。したがって、図形 T_1 について

$$H_1 = H_0 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a_1$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{2}a + \frac{2+\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}a$$

$$= \frac{3(2+\sqrt{2})}{4}a$$

$$W_1 = \sqrt{2}a + 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a_1$$

$$= \sqrt{2}a + 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{2}a$$

$$= \frac{2+3\sqrt{2}}{2}a$$

となる。

$$(\text{答}) \quad H_1 = \frac{3(2+\sqrt{2})}{4}a, \quad W_1 = \frac{2+3\sqrt{2}}{2}a$$

[2]

1 個の P_n につき 2 個の P_{n+1} がつき、また P_0 の個数は 1 個であるから、図形 P_n の個数の総和は 2^n である。したがって、図形 T_n に含まれる Y 字型の図形 $P_0, P_1, \dots, P_n$ の総数は

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^0 \cdot \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1$$

(答) $2^{n+1}-1$ 個

[3]

図形 P_n に含まれる線分の長さの総和を L_n とする。図形 P_n の 1 個あたりの線分の長さは

$$3a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n a$$

であり、これが 2^n 個存在するから、

$$L_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n a \times 2^n = 3a$$

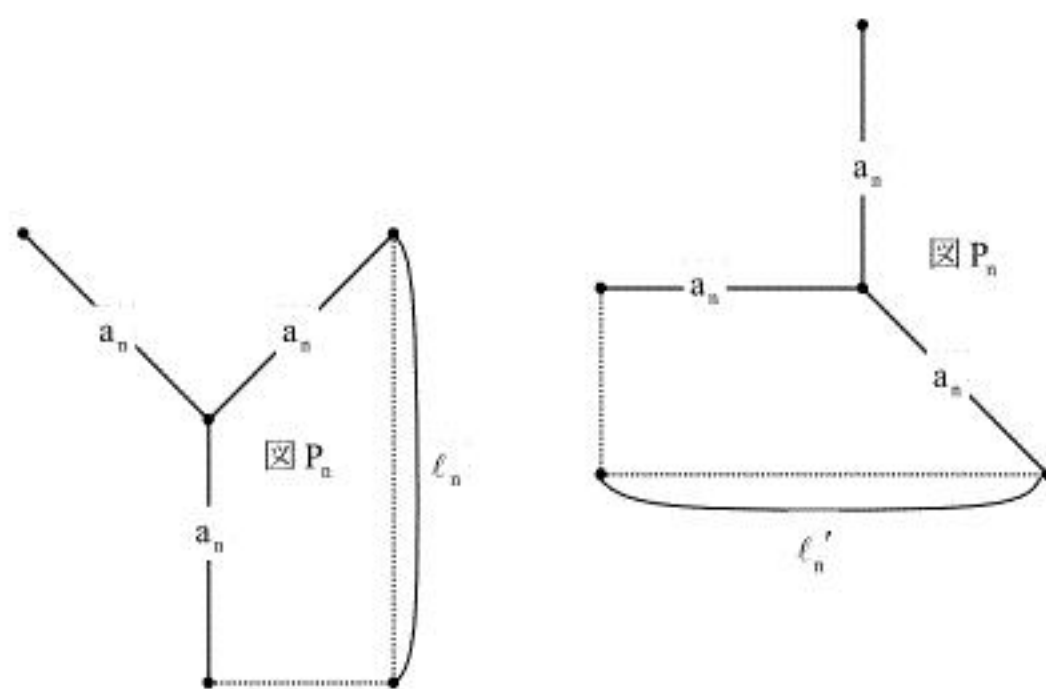
となる。したがって図形 T_n に含まれる線分の長さの総和は

$$\sum_{k=0}^n L_k = 3a(n+1)$$

である。

(答) $3a(n+1)$

[4]



上図のように長さ ℓ_n, ℓ'_n を定めると、

$$\ell_n = \ell'_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n a$$

であるから、付け加える P_n がどちらの向きであっても、図形 T_n と図形 T_{n-1} の高さの差は

$$H_n - H_{n-1} = \ell_n$$

となることがわかる。したがって、 $n \geq 1$ のとき

$$H_n = H_0 + \sum_{k=1}^n \ell_k \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで

$$\sum_{k=1}^n \ell_k = \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k a$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)a \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}a$$

であるから、①より

$$H_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}a$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left\{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}a$$

である。これは $n=0$ のときも成立する。

また、図形 T_n と図形 T_{n-1} の横幅の差は $W_n - W_{n-1} = 2\ell_n$ なので、 $n \geq 1$ のとき

$$W_n = W_0 + \sum_{k=1}^n 2\ell_k$$

$$= \sqrt{2}a + 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}a$$

$$= \sqrt{2}a + (2 + \sqrt{2})\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}a$$

となる。これは $n=0$ のときも成立する。

$$(\text{答}) \quad H_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left\{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}a, \quad W_n = \sqrt{2}a + (2 + \sqrt{2})\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}a$$