

I

〔解答〕

$$\text{ア} \quad m(x-p)+q \quad \text{イ} \quad 8m(q-mp)$$

$$\text{ウ} \quad 4\{(q-mp)^2-1\} \quad \text{エ} \quad -2pq$$

$$\text{オ} \quad q^2-1 \quad \text{カ} \quad -1$$

$$\text{キ} \quad y^2-5$$

〔解説〕

円 $P(p, q)$ を通る傾き m の直線 l の方程式は、

$$y = m(x-p) + q$$

である。直線 l と楕円 C の共有点の x 座標は、上式と楕円 C の方程式を連立して、

$$x^2 + 4\{m(x-p) + q\}^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (1+4m^2)x^2 + 8m(q-mp)x + 4(m^2p^2 - 2mpq + q^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+4m^2)x^2 + 8m(q-mp)x + 4\{(q-mp)^2 - 1\} = 0$$

の解で表せる。直線 l と楕円 C が接するとき、上式は重解を持つので、上式の判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4} = 16m^2(q-mp)^2 - (1+4m^2) \cdot 4\{(q-mp)^2 - 1\} = 0$$

$$\Leftrightarrow (q-mp)^2(16m^2 - 4 - 16m^2) + 4 + 16m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4(q-mp)^2 + 4 + 16m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (p^2 - 4)m^2 - 2pqm + q^2 - 1 = 0$$

となるので、このときの傾き m は上式の解である。上式の 2 解を α, β とすると、解と係数の関係より、

$$\alpha\beta = \frac{q^2-1}{p^2-4} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、点 $P(p, q)$ を通り楕円 C に接する 2 つの直線が直交しているから、

$$\alpha\beta = -1 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。①、②より、

$$\frac{q^2-1}{p^2-4} = -1$$

が成り立つ。よって、

$$\Leftrightarrow q^2 - 1 = -p^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow p^2 + q^2 - 5 = 0$$

が成り立つので、点 P は曲線

$$x^2 + y^2 - 5 = 0$$

上に存在する。

II

【解答】

ク	a	ケ	$-2a^3$
コ	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	カ	$\frac{-3+\sqrt{36a^2-3}}{6}$
シ	$\frac{-3-\sqrt{36a^2-3}}{6}$	ス	$\frac{\sqrt{21}}{3}$
セ	$\sqrt{k^2+k+\frac{1}{3}}$	ソ	$\frac{\sqrt{57}}{3}$
タ	$\sqrt{k^2-k+\frac{1}{3}}$	チ	$\sqrt{k^2+k+\frac{1}{3}}$

【解説】

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3a^2 \\ &= 3(x+a)(x-a) \end{aligned}$$

であるから、 $a > 0$ より、 $f(x)$ の増減表は下記のとおりである。

x	$\dots$	$-a$	$\dots$	a	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(a) = a^3 - 3a^3 = -2a^3$$

より、 $f(x)$ は $x = a$ で極小値 $-2a^3$ をとる。

$f(x) = f(x+1)$ を満たす実数 x が存在するための必要十分条件を求める。

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x+1)^3 - 3a^2(x+1) \\ &= x^3 + 3x^2 + 3(1-a^2)x + 1 - 3a^2 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x+1) \\ \Leftrightarrow x^3 - 3a^2x &= x^3 + 3x^2 + 3(1-a^2)x + 1 - 3a^2 \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 3x + 1 - 3a^2 &= 0 \end{aligned}$$

と変形できる。上式が実数解をもてばよいから、上式の判別式を D とすると、

$$D = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (1 - 3a^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 36a^2 \geq 3$$

$$\therefore a \geq \frac{\sqrt{3}}{6} \quad (\because a > 0)$$

となるので、これが $f(x) = f(x+1)$ を満たす x が存在するための必要十分条件である。

$a \geq \frac{\sqrt{3}}{6}$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(x+1) && \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 3x + 1 - 3a^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

と変形できる。 $3x^2 + 3x + 1 - 3a^2 = 0$ の解は、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 3(1 - 3a^2)}}{6} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{36a^2 - 3}}{6} \end{aligned}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ の解は、

$$x \leq \frac{-3 - \sqrt{36a^2 - 3}}{6} \quad \text{または} \quad \frac{-3 + \sqrt{36a^2 - 3}}{6} \leq x$$

である。 b_1 が最小となるためには、増減表より、

$$f(1) \leq f(2)$$

となればよい。したがって、

$$\begin{aligned} f(1) &\leq f(2) \\ \Leftrightarrow 1 - 3a^2 &\leq 8 - 6a^2 \\ \Leftrightarrow 3a^2 &\leq 7 \\ \therefore 0 < a &\leq \frac{\sqrt{21}}{3} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

のとき、 b_1 が最小となる。

$a \geq \frac{\sqrt{3}}{6}$ のとき、

$$k \geq \frac{-3 + \sqrt{36a^2 - 3}}{6}$$

となるための a の条件は、

$$\begin{aligned} k &\geq \frac{-3 + \sqrt{36a^2 - 3}}{6} \\ \Leftrightarrow 6k + 3 &\geq \sqrt{36a^2 - 3} \end{aligned}$$

と変形できる。両辺ともに正であるから、両辺二乗して、

$$\begin{aligned} (6k+3)^2 &\geq 36a^2 - 3 \\ \Leftrightarrow 36k^2 + 36k + 12 &\geq 36a^2 \end{aligned}$$

となるので、 $a > 0$ であるから、

$$\therefore a \leq \sqrt{k^2 + k + \frac{1}{3}}$$

が求める条件である。

$a \geq \frac{\sqrt{21}}{3}$ のとき、 b_2 が最小となるための条件は、

$$b_1 \geq b_2 \quad \text{かつ} \quad b_2 \leq b_3$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} b_1 &\geq b_2 \quad \text{かつ} \quad b_2 \leq b_3 \\ \Leftrightarrow a &\geq \frac{\sqrt{21}}{3} \quad \text{かつ} \quad 8 - 6a^2 \leq 27 - 9a^2 \\ \Leftrightarrow 3a^2 &\leq 19 \\ \therefore a &\leq \frac{\sqrt{57}}{3} \quad (\because a \geq \frac{\sqrt{21}}{3}) \end{aligned}$$

と求まる。同様にして、 b_k が最小となるための条件は、

$$b_{k-1} \geq b_k \quad \text{かつ} \quad b_k \leq b_{k+1}$$

であるから、

$$\begin{aligned} b_{k-1} &\geq b_k \quad \text{かつ} \quad b_k \leq b_{k+1} \\ \Leftrightarrow (k-1)^3 - 3a^2(k-1) &\geq k^3 - 3a^2k \quad \text{かつ} \quad k^3 - 3a^2k \leq (k+1)^3 - 3a^2(k+1) \\ \Leftrightarrow 3a^2 &\geq k^3 - (k-1)^3 \quad \text{かつ} \quad 3a^2 \leq (k+1)^3 - k^3 \\ \Leftrightarrow 3k^2 - 3k + 1 &\leq 3a^2 \leq 3k^2 + 3k + 1 \end{aligned}$$

となるので、 $a > 0$ であるから、

$$\sqrt{k^2 - k + \frac{1}{3}} \leq a \leq \sqrt{k^2 + k + \frac{1}{3}}$$

である。

III

〔解答〕

$$\begin{array}{lll} \text{ツ} & x^2 - \frac{1}{2} & \text{テ} \quad \cos t \\ \text{ト} & -\sin 2t & \text{ナ} \quad -\sin t \\ \text{ニ} & -2\cos 2t & \text{ヌ} \quad 1 \\ \text{ネ} & -\frac{1}{2} & \text{ノ} \quad -1 \\ \text{ハ} & -\frac{1}{2} & \text{ヒ} \quad 5 \\ \text{フ} & \frac{5}{4} & \text{ヘ} \quad \frac{\sqrt{31}}{8} \end{array}$$

〔解説〕

$$\begin{cases} x = \sin t & \cdots \text{①} \\ y = \frac{1}{2} \cos 2t & \cdots \text{②} \end{cases}$$

②より、

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \cos 2t \\ &= \frac{1}{2} (2\cos^2 t - 1) \\ &= \cos^2 t - \frac{1}{2} \\ \therefore \cos^2 t &= y + \frac{1}{2} \quad \cdots \text{③} \end{aligned}$$

である。また、①の両辺を二乗して、

$$x^2 = \sin^2 t \quad \cdots \text{④}$$

であるので、③、④より、

$$\begin{aligned} \sin^2 t + \cos^2 t &= 1 \\ \Leftrightarrow y + \frac{1}{2} + x^2 &= 1 \\ \therefore y + x^2 - \frac{1}{2} &= 0 \end{aligned}$$

である。①、②の両辺を t で微分して、

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \cos t \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{2} (-\sin 2t) \cdot 2 \\ &= -\sin 2t \end{aligned}$$

であるから、

$$\overline{\mathbf{v}} = (\cos t, -\sin 2t)$$

である。また、 $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ を t で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\sin t \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -2\cos 2t \end{aligned}$$

となるので、

$$\overline{\mathbf{a}} = (-\sin t, -2\cos 2t)$$

である。

$|\overline{\mathbf{v}}| = 0$ のとき、

$$\begin{cases} \cos t = 0 \\ -\sin 2t = 0 \end{cases}$$

であるから、上の条件は、整数 n を用いて、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \cos t = 0 \\ -\sin 2t = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} t = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ または } \frac{3}{2}\pi + 2n\pi \\ 2t = 2n\pi \text{ または } (2n+1)\pi \end{cases} \end{aligned}$$

と変形できるので、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} t = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ または } \frac{3}{2}\pi + 2n\pi \\ 2t = 2n\pi \text{ または } (2n+1)\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} t = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \\ t = n\pi \text{ または } \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \end{cases} \\ \therefore t &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \end{aligned}$$

と求まる。このとき、

$$\begin{aligned} x &= \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \\ &= \begin{cases} 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ -1 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \\ y &= \frac{1}{2} \cos(2n+1)\pi \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるから、条件より、

$$\mathbf{Q}\left(1, -\frac{1}{2}\right), \mathbf{R}\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$$

である。

$0 \leq t \leq 30$ のとき、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \leq 30 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq n + \frac{1}{2} \leq \frac{30}{\pi} \\ -\frac{1}{2} &\leq n \leq \frac{30}{\pi} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。 $3 < \pi < 3.15$ より、

$$9.03 < \frac{30}{\pi} - \frac{1}{2} < 9.5$$

であるから、 n は整数より、

$$0 \leq n \leq 9$$

である。したがって、偶数となる n の個数は、

$$n = 0, 2, 4, 6, 8$$

の 5 個である。よって、 $\mathbf{Q}$ を 5 回通る。

$|\overline{\mathbf{v}}|$ が最大となるとき、 $|\overline{\mathbf{v}}|^2$ も最大となる。したがって、 $|\overline{\mathbf{v}}|^2$ が最大値を求めればよい。

$$\begin{aligned} |\overline{\mathbf{v}}|^2 &= \cos^2 t + (-\sin 2t)^2 \\ &= \cos^2 t + \sin^2 2t \\ &= \cos^2 t + 4\cos^2 t \sin^2 t \\ &= \cos^2 t (1 + 4\sin^2 t) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \left(|\overline{\mathbf{v}}|^2\right)' &= 2\cos t(-\sin t) + 2\sin 2t(2\cos 2t) \\ &= -\sin 2t + 4\sin 2t \cos 2t \\ &= \sin 2t(4\cos 2t - 1) \end{aligned}$$

である。 $\left(|\overline{\mathbf{v}}|^2\right)'$ は周期 π の周期関数であることから、 $|\overline{\mathbf{v}}|^2$ も周期 π の周期関数である。したがって、 $0 \leq t < \pi$ とすると、

$$\begin{aligned} \left(|\overline{\mathbf{v}}|^2\right)' &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin 2t &= 0 \text{ または } \cos 2t = \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow t &= 0, \frac{\pi}{2}, \pi \text{ または } \cos 2t = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。 $0 \leq t < \pi$ における $\cos 2t = \frac{1}{4}$ の解を $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とおくと、 $|\overline{\mathbf{v}}|^2$ の増減表は下記のとおりである。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	β	$\cdots$	π
$\left(\overline{\mathbf{v}} ^2\right)'$	0	+	0	-	0	+	0	-	0
$ \overline{\mathbf{v}} ^2$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって、 $|\overline{\mathbf{v}}|^2$ は $t = \alpha$ または β のときに最大となる。 $t = \alpha$ のとき、

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow 2\cos^2 \alpha - 1 &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \cos^2 \alpha &= \frac{5}{8}, \sin^2 \alpha = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

であり、同様に、 $t = \beta$ のとき、

$$\cos^2 \beta = \frac{5}{8}, \sin^2 \beta = \frac{3}{8}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} |\overline{\mathbf{v}}|^2 &= \frac{5}{8} \left(1 + 4 \cdot \frac{3}{8}\right) \\ &= \frac{25}{16} \end{aligned}$$

であるから、 $|\overline{\mathbf{v}}|^2$ は $t = \alpha, \beta$ で最大値 $\frac{25}{16}$ をとる。 $|\overline{\mathbf{v}}| \geq 0$ であるから、 $|\overline{\mathbf{v}}|$ は $t = \alpha, \beta$ のとき、

最大値 $\frac{5}{4}$ をとる。

$|\overline{\mathbf{a}}|$ が最小となるとき、 $|\overline{\mathbf{a}}|^2$ も最小となるので、 $|\overline{\mathbf{a}}|^2$ の最小値を求める。

$$\begin{aligned} |\overline{\mathbf{a}}|^2 &= (-\sin t)^2 + (-2\cos 2t)^2 \\ &= \sin^2 t + 4\cos^2 2t \\ &= \sin^2 t + 4(1 - 2\sin^2 t)^2 \\ &= 16\sin^4 t - 15\sin^2 t + 4 \\ &= 16\left(\sin^2 t - \frac{15}{32}\right)^2 - \frac{225}{64} + 4 \\ &= 16\left(\sin^2 t - \frac{15}{32}\right)^2 + \frac{31}{64} \end{aligned}$$

であり、 $0 \leq \sin^2 t \leq 1$ より、 $|\overline{\mathbf{a}}|^2$ は $\sin^2 t = \frac{15}{32}$ のとき、最小値 $\frac{31}{64}$ をとる。したがって、 $|\overline{\mathbf{a}}|$ は

$\sin^2 t = \frac{15}{32}$ のとき、最小値 $\frac{\sqrt{31}}{8}$ をとる。

IV

【解答】

$$\begin{array}{ll} [1] & \text{ホ} \quad \log \left| \frac{x}{a-x} \right| \\ & \text{マ} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{a-x} \\ & \text{ミ} \quad 0 \\ [2] & \text{ム} \quad \frac{a}{2} \\ & \text{メ} \quad a \log \frac{a}{2} \\ & \text{モ} \quad \frac{2}{e} \\ & \text{ヤ} \quad -\frac{2}{e} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} [3] & \text{ユ} \quad a+1 \\ & \text{ヨ} \quad \log(a+1) \\ & \text{ラ} \quad \frac{a(a+1)}{a+2} \end{array}$$

【解答】

[1]

$$\begin{array}{l} [1] \quad x < 0 \text{ のとき,} \\ f(x) = x \log(-x) + (a-x) \log(a-x) \end{array}$$

であるから,

$$f'(x) = \log(-x) + x \cdot \frac{-1}{-x} + (-1) \log(a-x) + (a-x) \cdot \frac{-1}{a-x}$$

$$= \log(-x) + 1 - \log(a-x) - 1$$

$$= \log(-x) - \log(a-x)$$

$$f''(x) = \frac{-1}{-x} - \frac{-1}{a-x}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{a-x}$$

である。

$$[2] \quad 0 < x < a \text{ のとき,}$$

$$f(x) = x \log x + (a-x) \log(a-x)$$

であるから,

$$f'(x) = \log x + x \cdot \frac{1}{x} + (-1) \log(a-x) + (a-x) \cdot \frac{-1}{a-x}$$

$$= \log x + 1 - \log(a-x) - 1$$

$$= \log x - \log(a-x)$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{-1}{a-x}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{a-x}$$

である。

$$[3] \quad x > a \text{ のとき,}$$

$$f(x) = x \log x + (a-x) \log(x-a)$$

であるから,

$$f'(x) = \log x + x \cdot \frac{1}{x} + (-1) \log(x-a) + (a-x) \cdot \frac{1}{x-a}$$

$$= \log x + 1 - \log(x-a) - 1$$

$$= \log x - \log(x-a)$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-a}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{a-x}$$

である。

$$[1] \sim [3] \text{ より, } x \neq 0, x \neq a \text{ で,}$$

$$f'(x) = \log|x| - \log|a-x|$$

$$= \log \left| \frac{x}{a-x} \right|$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{a-x}$$

である。 $f'(x)$ の極限を考える。 $+\infty$ 側の極限を考えるので、 $a \leq x$ としてよい。このとき、

$$f'(x) = \log x - \log(x-a)$$

$$= \log \frac{x}{x-a}$$

$$= \log \left(1 + \frac{a}{x-a} \right)$$

であるから,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \log(1+0)$$

$$= 0$$

と求まる。

[2]

$$f'(x) = \log|x| - \log|a-x|$$

$$= \log \left| \frac{x}{a-x} \right|$$

であるから,

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{x}{a-x} \right| = 1$$

となるので、両辺二乗して,

$$\frac{x^2}{(a-x)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = (a-x)^2$$

$$\therefore x = \frac{a}{2}$$

と求まる。したがって、 $f(x)$ は $x = \frac{a}{2}$ で極値をとり、極小値 m は、

$$m = \frac{a}{2} \log \frac{a}{2} + \left(a - \frac{a}{2} \right) \log \left| a - \frac{a}{2} \right|$$

$$= \frac{a}{2} \log \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \log \frac{a}{2}$$

$$= a \log \frac{a}{2}$$

である。また,

$$m' = \log \frac{a}{2} + a \cdot \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \log \frac{a}{2} + 1$$

であるから,

$$m' = 0$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{a}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow e^{-1} = \frac{a}{2}$$

$$\therefore a = \frac{2}{e}$$

となるので、 m の増減表は下記のとおりである。

a	$\cdots$	$\frac{2}{e}$	$\cdots$
m'	$-$	0	$+$
m	$\searrow$		$\nearrow$

したがって、 m は $a = \frac{2}{e}$ のとき、最小値

$$\frac{2}{e} \log \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{e} = -\frac{2}{e}$$

をとる。

[3]

$y = f(x)$ 上の点 $(p, f(p))$ における接線の方程式は、

$$y = f'(p)(x-p) + f(p)$$

$$= (\log|p| - \log|a-p|)x - p(\log|p| - \log|a-p|) + p \log|p| + (a-p) \log|a-p|$$

$$= (\log|p| - \log|a-p|)x + a \log|a-p| \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表せる。これが原点を通るから、

$$a \log|a-p| = 0$$

$$\Leftrightarrow |a-p| = 1$$

となる。 $p > a$ のとき、

$$p - a = 1$$

$$\therefore p = a + 1$$

と求まる。したがって、このとき、

$$f'(p) = \log|a+1| - \log|a-(a+1)|$$

$$= \log(a+1) - \log|-1|$$

$$= \log(a+1)$$

である。また、 $k \neq 0$ なる実数 k を用いて、

$$y = \log(a+1)x + k$$

と表せる直線が $y = f(x)$ の接線であるとき、 $\textcircled{1}$ より、

$$\log(a+1) = \log|p| - \log|a-p|$$

の $p = a+1$ 以外の解を求めればよい。

$$\log(a+1) = \log|p| - \log|a-p|$$

$$\Leftrightarrow \log(a+1) = \log \left| \frac{p}{a-p} \right|$$

$$\Leftrightarrow (a+1) = \left| \frac{p}{a-p} \right|$$

$$\Leftrightarrow \pm(a+1) = \frac{p}{a-p}$$

$$\Leftrightarrow p = \pm(a+1)(a-p)$$

$$\Leftrightarrow \{1 \pm (a+1)\} p = \pm a(a+1) \quad (\text{複号同順})$$

であるから、 $p \neq a+1$ より、

$$p = \frac{a(a+1)}{a+2}$$

と求まる。