

(第3時限：100分)

2012年度 ②

数 学 問 題

(理 系)

(全4ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを、
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ m を実数とする。座標平面において、直線 $y = mx + 1$ と双曲線 $4x^2 - y^2 = 4$ が2つの異なる共有点をもつのは

$$|m| < \text{ア} \quad \text{ただし} \quad |m| \neq \text{イ} \quad \cdots \cdots \text{①}$$

のときであり、このとき、2つの共有点と原点を頂点とする三角形の面積 S は

$$S = \text{ウ}$$

と表される。また、2つの共有点を結ぶ線分の中点を $P(\alpha, \beta)$ とすると

$$\alpha = \text{エ}, \quad \beta = \text{オ}$$

である。 m が①の範囲で変化するとき、点 P の軌跡は、方程式

$$\text{カ} x^2 + \text{キ} y^2 + y = 0$$

で表される曲線の、 $y \geq 1$ の部分と $y < \text{ク}$ の部分である。

(注： ウ エ オ は m の式，他は数値を入れよ。)

II a, b は実数で $a^2 + b^2 \neq 0$ とする。また

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。2 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ケ}} & \boxed{\text{コ}} \\ b & a \end{pmatrix}$$

は, $JA = AJ$ を満たしている。また

$$A^{-1} = \boxed{\text{サ}} J + \boxed{\text{シ}} E$$

である。(注: $\boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{シ}}$ には行列を用いず, a, b を用いた式を記せ。)

[1] $A^3 = 8E$ となるのは

$$\begin{aligned} a &= \boxed{\text{ス}}, b = \boxed{\text{セ}} \\ a &= \boxed{\text{ス}}, b = -\boxed{\text{セ}} \\ a &= \boxed{\text{ソ}}, b = \boxed{\text{タ}} \end{aligned}$$

の場合である。(ただし, $\boxed{\text{セ}}$ には正の数を記入せよ。)

[2] O を原点とする座標平面において, 行列 A の表す一次変換による点 $P(2, 1)$ の像を Q で表し, $\triangle OPQ$ の面積を S とする。ただし, 点 O, P, Q が一直線上にあるときは $S = 0$ とする。 S を a, b を用いた式で表すと

$$S = \boxed{\text{チ}}$$

であり, $a^2 + b^2 = a$ のとき, S のとりうる値の範囲は

$$0 \leq S \leq \boxed{\text{ツ}}$$

である。

Ⅲ n を正の整数, k は $0 \leq k \leq n$ を満たす整数とする。実数 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ に対して, 積分 $I_{n,k}$ を

$$I_{n,0} = \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^n dx, \quad I_{n,n} = \int_{\alpha}^{\beta} (x - \beta)^n dx,$$

$$I_{n,k} = \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^{n-k} (x - \beta)^k dx \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

で定義する。 $I_{n,0}$ と $I_{n,n}$ を n, α, β を用いて表すと, $I_{n,0} = \boxed{\text{テ}}$,

$I_{n,n} = \boxed{\text{ト}}$ となる。 $k = 1, 2, \dots, n$ のとき, $I_{n,k}$ と $I_{n,k-1}$ の関係を求めると,

$I_{n,k} = \boxed{\text{ナ}} I_{n,k-1}$ を得る。したがって,

$$I_{n,k} = \boxed{\text{ニ}} I_{n,0}$$

が成り立つ。ここで,

$$H_{n,k} = \left| \frac{I_{n,k}}{I_{n,0}} \right|$$

とする。 $H_{n,k}$ と $H_{n,k-1}$ の関係を求めると

$$H_{n,k} = \boxed{\text{ヌ}} H_{n,k-1}$$

を得る。

m を 0 以上の整数とする。整数 k が, $1 \leq k \leq 2m+1$ を満たすとき, $H_{2m+1,k-1} < H_{2m+1,k}$ となる m と k の条件は $k \geq \boxed{\text{ネ}}$, $H_{2m+1,k-1} > H_{2m+1,k}$ となる場合の条件は $k \leq \boxed{\text{ノ}}$ である。 m を定数とみなして整数 l を $0 \leq l \leq 2m+1$ の範囲で動かすとき, $H_{2m+1,l}$ は, $l = \boxed{\text{ハ}}$ または $l = \boxed{\text{ヒ}}$ で最小になる。また, $H_{2m,l}$ は, 整数 l を $0 \leq l \leq 2m$ の範囲で動かすとき, $l = \boxed{\text{フ}}$ で最小になる。

Ⅳ 3つのクラブ A, B, C があり, 各クラブには 6 人の部員がいる。

A と B の両方のクラブに所属する人は 3 人

B と C の両方のクラブに所属する人は 4 人

A と C の両方のクラブに所属する人は 4 人

A と B と C のすべてのクラブに所属する人は 2 人

である。各クラブは部員の中からくじで代表者を 1 人決める。

〔1〕 A のみに入っている人は 人である。

〔2〕 A, B, C のいずれかに入っている人は 人である。

〔3〕 A, B, C の代表者を決めた結果, 1 人が A と B の代表者を兼ねる確率は である。

〔4〕 1 人が A, B, C すべての代表者を兼ねる確率は である。

〔5〕 A, B, C の代表者がすべて異なる人になる選び方は 通りある。

〔6〕 A, B, C の代表者がすべて異なる人になる確率は である。

〔7〕 3つのクラブ A, B, C に所属する全員の中で, 代表者に選ばれる人数の期待値は である。