

日付 (2月7日) セット (⑤) 時限 (3)

方式 (特定科目重視3教科方式 【理系】)

科目名 : 数学 (理系)

補足箇所 : 問題 2 ページ

下 から 7 行目

補足内容 : 「 k を 2 以上の整数とし,」の前に
「以下においては,」を追加する。

(第3時限：100分)

2012年度 ⑤

数 学 問 題

(理 系)

(全4ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを、
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ 座標平面において点 $P(p, q)$ が楕円

$$C: x^2 + 4y^2 = 4$$

の外部にあるとする。ただし $p \neq \pm 2$ とする。

点 $P(p, q)$ を通る傾き m の直線 l の方程式は

$$y = \text{ア}$$

と表される。直線 l と楕円 C の共有点の x 座標は、2次方程式

$$(1 + 4m^2)x^2 + \text{イ}x + \text{ウ} = 0$$

の解として与えられる。したがって、直線 l が楕円 C に接しているとき、傾き m は2次方程式

$$(p^2 - 4)m^2 + \text{エ}m + \text{オ} = 0$$

を満たす。

点 $P(p, q)$ を通り楕円 C に接する2つの直線が直交しているとき、 p と q は

$$\frac{\text{オ}}{p^2 - 4} = \text{カ}$$

を満たし、点 P は曲線

$$x^2 + \text{キ} = 0$$

の上にある。

II a を正の実数とする。関数 $f(x) = x^3 - 3a^2x$ は、 $x = \boxed{\text{ク}}$ において極小値 $\boxed{\text{ケ}}$ をとる。 $f(x) = f(x+1)$ を満たす実数 x が存在するための必要十分条件は $a \geq \boxed{\text{コ}}$ である。 $a \geq \boxed{\text{コ}}$ のとき

$$f(x) \leq f(x+1)$$

となる x の範囲は

$$x \geq \boxed{\text{サ}} \text{ または } x \leq \boxed{\text{シ}}$$

である。

数列 $\{b_n\}$ を $b_n = f(n) (n = 1, 2, \dots)$ で定める。以下において、 b_k が最小値であるとは、すべての n について、 $b_k \leq b_n$ が成り立つときをいう。

b_1 が最小値となるような a の範囲は、 $0 < a \leq \boxed{\text{ス}}$ である。

k を 2 以上の整数とし、 $a \geq \boxed{\text{コ}}$ とする。このとき、 $k \geq \boxed{\text{サ}}$ であるための a に関する必要十分条件を、 k を用いて表すと、 $a \leq \boxed{\text{セ}}$ である。

$a \geq \boxed{\text{ス}}$ のとき、 b_2 が最小値となるための条件を求めると、 $a \leq \boxed{\text{ソ}}$ になる。

b_k が最小値となる a の範囲を、 k を用いて表すと

$$\boxed{\text{タ}} \leq a \leq \boxed{\text{チ}}$$

である。

Ⅲ 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 (x, y) が,

$$x = \sin t, y = \frac{1}{2} \cos 2t$$

で表されているとする。このとき、点 P は曲線 $y + \boxed{\text{ツ}} = 0$ 上を動く。また、点 P の速度ベクトルは

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = \left(\boxed{\text{テ}}, \boxed{\text{ト}} \right)$$

であり、加速度ベクトルは

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right) = \left(\boxed{\text{ナ}}, \boxed{\text{ニ}} \right)$$

である。

速さ $|\vec{v}|$ が 0 になるとき、点 P は、点 Q $(\boxed{\text{ヌ}}, \boxed{\text{ネ}})$ あるいは点 R $(\boxed{\text{ノ}}, \boxed{\text{ハ}})$ の位置にある。(ただし、 $\boxed{\text{ヌ}} > \boxed{\text{ノ}}$ とする。) $0 \leq t \leq 30$ において、点 P は定点 Q を $\boxed{\text{ヒ}}$ 回通る。

$|\vec{v}|$ の最大値は $\boxed{\text{フ}}$ であり、加速度の大きさ $|\vec{a}|$ の最小値は $\boxed{\text{ヘ}}$ である。

IV $a > 0$ とする。関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x \log |x| + (a - x) \log |a - x| \quad (x \neq 0 \text{ かつ } x \neq a),$$

$$f(0) = f(a) = a \log a$$

で定める。なお

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \log |x| = 0$$

であるので $x = 0$, $x = a$ を含む全ての実数 x において, $f(x)$ は連続である。ただし $\log x$ は x の自然対数を表し, その底を e とする。

[1] $x \neq 0$ かつ $x \neq a$ のとき, $f'(x) = \boxed{\text{ホ}}$, $f''(x) = \boxed{\text{マ}}$ である。

また, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \boxed{\text{ミ}}$ である。

[2] $f(x)$ は $x = \boxed{\text{ム}}$ において極値 m をとり, a を用いて m を表すと,

$m = \boxed{\text{メ}}$ である。 m は, $a = \boxed{\text{モ}}$ において最小値 $\boxed{\text{ヤ}}$ をとる。

[3] $p > a$ とする。曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(p, f(p))$ における接線が原点を通

るとき, $p = \boxed{\text{ユ}}$ であり, $f'(p) = \boxed{\text{ヨ}}$ である。 $k \neq 0$ とするとき,

直線 $y = \boxed{\text{ヨ}} x + k$ が曲線 $y = f(x)$ の接線であるならば, 接点の x 座

標は $\boxed{\text{ラ}}$ である。