

【解答】

- [1]    ア        60  
          イ        7  
          ウ         $\frac{80\sqrt{3}}{13}$   
          エ         $\frac{16\sqrt{3}-12}{13}$
- [2]    オ        28  
          カ        10  
          キ        10
- [3]    ク         $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$   
          ケ         $3-\sqrt{5}$   
          コ         $1+\sqrt{5}$   
          サ         $1+\sqrt{5}$   
          シ        2

【解説】

[1]

まず、三角形 ABC は鋭角三角形なので、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle A &= 10\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \sin \angle A &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \therefore \angle A &= 60^\circ\end{aligned}$$

となる。また、余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ \\ &= 64 + 25 - 40 \\ &= 49 \\ \therefore BC &= 7\end{aligned}$$

となる。次に、

$$BP : PC = AB : AC = 8 : 5$$

であるので、 $\triangle ABP$  の面積は、

$$10\sqrt{3} \times \frac{8}{8+5} = \frac{80\sqrt{3}}{13}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AP \cdot \sin 30^\circ &= \frac{80\sqrt{3}}{13} \\ \Leftrightarrow AP &= \frac{40\sqrt{3}}{13}\end{aligned}$$

である。ここで、 $\triangle ABP$  の内接円の半径を  $r$  とすると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot r \cdot (AB + BP + AP) &= \frac{80\sqrt{3}}{13} \\ \Leftrightarrow r \cdot \left( 8 + 7 \times \frac{8}{13} + \frac{40\sqrt{3}}{13} \right) &= \frac{160\sqrt{3}}{13} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{4\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{16\sqrt{3}-12}{13}\end{aligned}$$

となる。

[2]

6 本の飲み物を 6 個の玉と考え、それらを 1 列に並べ、2 本の柵を置く事を考える。左端から 1 本目の柵までの玉を水、1 本目の柵から 2 本目の柵までの玉をお茶、2 本目の柵から右端までの玉をスポーツドリンクと考える。

購入しない飲み物があってもよいものとするときの購入の組み合わせの総数は、玉と柵を 1 列に並べる並べ方の総数に等しく、

$$\frac{8!}{6!2!} = 28 \text{ (通り)}$$

である。また、3 種類の飲み物をそれぞれ少なくとも 1 本は購入しなければならないときの購入の組み合わせは、玉と玉の間の 5 ヶ所に柵を置くことを考えればよいので、

$${}_5C_2 = 10 \text{ (通り)}$$

である。また、袋の中に水、お茶、スポーツドリンクの 3 種類の飲み物がそれぞれ 3 本ずつあるとき、取り出す 3 本の内、水が最も数が多いとする。このとき、水を 3 本取り出すときの 1 通りと、水を 2 本取り出す 2 通りがあるので、合計 3 通りある。最も数が多い種類は、お茶またはスポーツドリンクのときも考え、また、各種類 1 本ずつ取り出す場合も考えると、求める取り出し方の組み合わせは、

$$3 \times 3 + 1 = 10 \text{ (通り)}$$

ある。

[3]

$\triangle BAG$  と  $\triangle AGF$  は相似であるから、

$$BA : AG = AG : GF$$

である。よって、 $AG = AF = BF = x$  とおくと、

$$\begin{aligned}2 : x &= x : 2 - x \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 &= 0 \\ \therefore x &= -1 + \sqrt{5} \quad (\because x > 0)\end{aligned}$$

となる。よって、求める相似比は、

$$2 : -1 + \sqrt{5} = 1 : \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

となる。また、FG の長さは

$$2 - (-1 + \sqrt{5}) = 3 - \sqrt{5}$$

となる。

また、

$$\begin{aligned}BD &= AD \\ &= AG + GD \\ &= AG + BC \\ &= (-1 + \sqrt{5}) + 2 \\ &= 1 + \sqrt{5}\end{aligned}$$

となるので、

$$\overline{BD} = (1 + \sqrt{5}) \overline{b}$$

である。同様にして、

$$\overline{EC} = (1 + \sqrt{5}) \overline{a}$$

となるので、

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \overline{AE} + \overline{EC} \\ &= (1 + \sqrt{5}) \overline{a} + 2 \overline{b}\end{aligned}$$

となる。

## II

【解答】

$$\text{ス} \quad px+y$$

$$\text{セ} \quad -\frac{1}{2}$$

$$\text{ソ} \quad 100-p$$

$$\text{タ} \quad 4000$$

$$\text{チ} \quad 100-x$$

$$\text{ツ} \quad ax^2$$

$$\text{テ} \quad \frac{3}{400}$$

$$\text{ト} \quad \frac{200}{3}$$

$$\text{ナ} \quad \frac{100}{3}$$

$$\text{ニ} \quad \frac{40000}{27}$$

【解説】

まず,

$$px+y=1000$$

である。これを  $u$  の式に代入すると,

$$\begin{aligned} u &= (1000-px) - \frac{1}{2}(x-100)^2 \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + (100-p)x - 4000 \end{aligned}$$

のようになる。平方完成すると,

$$u = -\frac{1}{2}\{x-(100-p)\}^2 + \frac{1}{2}p^2 - 100p + 1000$$

となるので,  $u$  が最大るとき,

$$x=100-p$$

$$\Leftrightarrow p=100-x \quad \cdots \cdots \text{①}$$

となる。次に,

$$t = px - \frac{a}{3}x^3 - 100$$

となるので,  $t=f(x)$  とすると,

$$f'(x) = -ax^2 + p$$

となる。 $t=f(x)$  の増減表は下表のようになる。

|         |   |     |                      |     |
|---------|---|-----|----------------------|-----|
| $x$     | 0 | ... | $\sqrt{\frac{p}{a}}$ | ... |
| $f'(x)$ |   | +   | 0                    | -   |
| $f(x)$  |   | ↗   |                      | ↘   |

よって, 利益  $t$  が最大になるのは,

$$x = \sqrt{\frac{p}{a}}$$

$$\Leftrightarrow p = ax^2 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

となるときである。①と②を連立すると,

$$ax^2 + x - 100 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{1+400a}}{2a} \quad (x \geq 0)$$

であるので, この点での②の接線の傾きは,

$$2a \times \frac{-1 + \sqrt{1+400a}}{2a} = \sqrt{1+400a} - 1$$

となる。ここで, この傾きは①と垂直であることより,

$$\sqrt{1+400a} - 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow 1+400a = 4$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3}{400}$$

である。このとき,

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1+3}}{2 \times \frac{3}{400}}$$

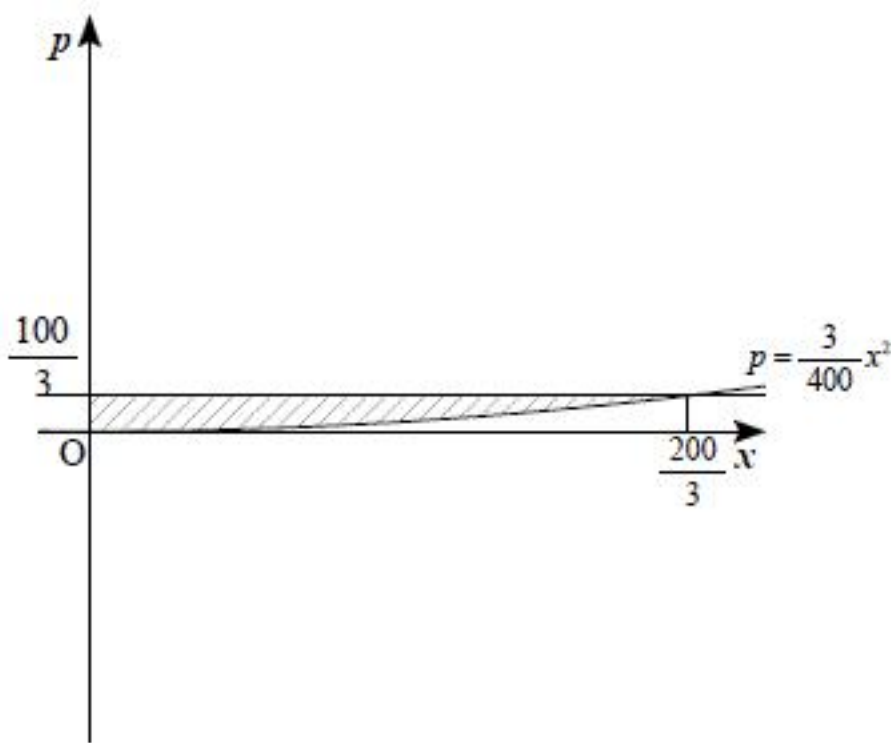
$$= \frac{200}{3}$$

となるので, ①に代入すると価格は,

$$p = 100 - \frac{200}{3}$$

$$= \frac{100}{3}$$

である。最後に, 求める面積は, 下図の斜線部の面積である。



よって, 求める面積は,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{200}{3}} \left( \frac{100}{3} - \frac{3}{400}x^2 \right) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{400}x^3 + \frac{100}{3}x \right]_0^{\frac{200}{3}} \\ &= \frac{40000}{27} \end{aligned}$$

である。

### Ⅲ

[1]

$$f(x)=x^3+3x+14 \text{ とすると,}$$

$$f'(x)=3x^2+3>0$$

であるので、 $f(x)$ は単調増加関数である。よって、求める実数解の個数は、1個である。

(答) 1個

[2]

$$g(x)=x^3+3px+q \text{ とすると,}$$

$$g'(x)=3x^2+3p$$

となる。ここで、 $p$ の正負で場合分けする。

[1]  $p>0$ のとき

$g'(x)>0$ となるので、 $g(x)$ は題意をみたす。また、

$$4p^3>0, q^2\geq 0$$

であるので、 $D<0$ である。

[2]  $p<0$ のとき

$g(x)$ の増減表は下表のようになる。

|         |            |              |            |             |            |
|---------|------------|--------------|------------|-------------|------------|
| $x$     | ...        | $-\sqrt{-p}$ | ...        | $\sqrt{-p}$ | ...        |
| $g'(x)$ | +          | 0            | -          | 0           | +          |
| $g(x)$  | $\nearrow$ |              | $\searrow$ |             | $\nearrow$ |

ここで、

$$\begin{cases} g(-\sqrt{-p})=-2p\sqrt{-p}+q \\ g(\sqrt{-p})=2p\sqrt{-p}+q \end{cases}$$

となるが、題意を満たすためには、

$$g(\sqrt{-p})>0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$g(-\sqrt{-p})<0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

の2通りが考えられる。①のとき、

$$2p\sqrt{-p}+q>0$$

$$\Leftrightarrow q>-2p\sqrt{-p}$$

$$\Leftrightarrow q^2>-4p^3$$

$$\Leftrightarrow -4p^3-q^2<0$$

となるので、 $D<0$ は成り立つ。②のとき、

$$-2p\sqrt{-p}+q<0$$

$$\Leftrightarrow q<2p\sqrt{-p}$$

$$\Leftrightarrow q^2>-4p^3 \quad (\because 2p\sqrt{-p}<0)$$

$$\Leftrightarrow -4p^3-q^2<0$$

となるので、 $D<0$ は成り立つ。

以上、[1]、[2]より、 $g(x)=0$ が1つの実数解と2つの虚数解をもつとき、 $D<0$ であることが示された。

(証明終)

[3]

$$h(x)=x^3-3ax+a(a-3) \text{ とすると,}$$

$$h'(x)=3x^2-3a$$

となるので、 $a$ の正負で場合分けする。

[1]  $a=0$ のとき

$$h(x)=x^3$$

となるので $h(x)=0$ の虚数解はなく、題意を満たさない。

[2]  $a<0$ のとき

$h'(x)>0$ となるので、 $h(x)$ は単調増加関数であり、 $a\leq 0$ のとき $h(x)=0$ は1つの実数解と2つの虚数解をもつ。したがって、題意を満たす。

[3]  $a>0$ のとき

$h(x)$ の増減表は下表のようになる。

|         |            |             |            |            |            |
|---------|------------|-------------|------------|------------|------------|
| $x$     | ...        | $-\sqrt{a}$ | ...        | $\sqrt{a}$ | ...        |
| $h'(x)$ | +          | 0           | -          | 0          | +          |
| $h(x)$  | $\nearrow$ |             | $\searrow$ |            | $\nearrow$ |

ここで、

$$\begin{cases} h(-\sqrt{a})=a^2+2a\sqrt{a}-3a \\ h(\sqrt{a})=a^2-2a\sqrt{a}-3a \end{cases}$$

となるが、題意を満たすためには、

$$h(\sqrt{a})>0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$h(-\sqrt{a})<0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

の2通りが考えられる。③のとき、

$$a^2-2a\sqrt{a}-3a>0$$

$$\Leftrightarrow a-3>2\sqrt{a} \quad (\because a>0)$$

$$\Leftrightarrow a^2-6a+9>4a$$

$$\Leftrightarrow (a-9)(a-1)>0$$

$$\therefore a<1, 9<a$$

となる。よって、③のとき題意を満たす $a$ の値の範囲は、

$$0<a<1, a>9 \quad \cdots \textcircled{5}$$

である。④のときも、

$$a^2+2a\sqrt{a}-3a<0$$

$$\Leftrightarrow a<1, 9<a$$

となるので、このときの $a$ の値の範囲は、⑤と同じになる。

以上、[1]、[2]、[3]より求める $a$ の値の範囲は、

$$a<0, 0<a<1, 9<a$$

となる。

(答)  $a<0, 0<a<1, 9<a$