

I

$$[1] \quad \text{ア} \quad \frac{1}{3} \quad \text{イ} \quad -\frac{\sqrt{2}}{6} \quad \text{ウ} \quad 2 \quad \text{エ} \quad \sqrt{2}$$

$$[2] \quad \text{オ} \quad x^2 - y^2 \quad \text{カ} \quad xy \quad \text{キ} \quad x^4 - x^2 - 2 \quad \text{ク} \quad \sqrt{2} \quad \text{ケ} \quad 1$$

[解説]

[1]

$$\begin{aligned} \frac{1+2\sqrt{2}i}{-2+5\sqrt{2}i} &= \frac{(1+2\sqrt{2}i)(-2-5\sqrt{2}i)}{(-2+5\sqrt{2}i)(-2-5\sqrt{2}i)} \\ &= \frac{2-\sqrt{2}i}{6} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}i \end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned} \frac{2-\sqrt{2}i}{6} &= \frac{(2-\sqrt{2}i)(2+\sqrt{2}i)}{6(2+\sqrt{2}i)} \\ &= \frac{6}{12+6\sqrt{2}i} \\ &= \frac{1}{2+\sqrt{2}i} \end{aligned}$$

である。

[2]

$$(x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

であるから、 $1+2\sqrt{2}i$ と実部、虚部別々に比較して、

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \dots \text{①}$$

$$xy = \sqrt{2} \quad \dots \text{②}$$

となる。 $x > 0$ で考えるので②より、 $y = \frac{\sqrt{2}}{x}$ として①に代入して、

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{2}{x^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

である。因数分解して

$$(x^2 - 2)(x^2 + 1) = 0$$

であり、 $x^2 + 1 > 0$ より

$$x^2 - 2 = 0$$

である。

$x > 0$ より $x = \sqrt{2}$ である。

最後に、 $x = \sqrt{2}$ を②に代入すると、 $y = 1$ である。

II

$$\begin{array}{llllll} \text{コ} & -1 & \text{サ} & \frac{3}{2} & \text{シ} & 2 & \text{ス} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & \text{セ} & 3-2^{n+1} \\ \text{ソ} & 2-2^{n+1} & \text{タ} & -3+3 \cdot 2^n & \text{チ} & -2+3 \cdot 2^n & \text{ツ} & 3x+2y \end{array}$$

[解説]

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2a-1 & -a-2b \\ 4a+3 & 3a+4b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & ca \\ a & cb \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、 $AB = B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ のとき各成分を比較して、 $(1, 1)$ 成分から

$$\begin{aligned} -2a-1 &= 1 \\ \Leftrightarrow a &= -1 \end{aligned}$$

である。

また $(1, 2)(2, 2)$ 成分の比較から、

$$\begin{aligned} -2b+1 &= -c & \dots\dots \textcircled{1} \\ 4b-3 &= bc & \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ から c を消去して、

$$\begin{aligned} 4b-3 &= b(2b-1) \\ \Leftrightarrow (b-1)(2b-3) &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで B には逆行列が存在するので行列式は0ではない。すなわち

$$\begin{aligned} 1 \cdot b - (-1)^2 &\neq 0 \\ \Leftrightarrow b &\neq 1 \end{aligned}$$

である。よって $b = \frac{3}{2}$ となる。 $\textcircled{1}$ 式から、

$$\begin{aligned} c &= 2b-1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

である。

B の行列式は $b-1 = \frac{1}{2}$ であるから、 B の逆行列 B^{-1} は、

$$\begin{aligned} B^{-1} &= 2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

$AB = B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ の両辺に B^{-1} を左からかけて、

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

である。よって両辺 n 乗して、

$$B^{-1}A^nB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

である。よって

$$\begin{aligned} A^n &= B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} B^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2^{n+1} & 2^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3-2^{n+1} & 2-2^{n+1} \\ -3+3 \cdot 2^n & -2+3 \cdot 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

Q_n は $(0, 1)$ を A^n により表される一次変換で移した点であるからその座標は、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-2^{n+1} \\ -2+3 \cdot 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表せる。 y について、 $2^n = \frac{y+2}{3}$ と変形できるから x の式に代入して、

$$\begin{aligned} x &= 2-2 \cdot \frac{y+2}{3} \\ \Leftrightarrow 3x+2y &= 2 \end{aligned}$$

となる。

Ⅲ

$$\begin{array}{llll} \text{テ} & a^2+s^2 & \text{ト} & st-a\sqrt{a^2+s^2-t^2} & \text{ナ} & a^2t+sa\sqrt{a^2+s^2-t^2} \\ \\ \text{ニ} & st+a\sqrt{a^2+s^2-t^2} & \text{ヌ} & a^2t-sa\sqrt{a^2+s^2-t^2} & \text{ネ} & 2a\sqrt{a^2+s^2-t^2}\sqrt{1+s^2} \\ \\ \text{ノ} & 2\sqrt{1+s^2} & \text{ハ} & \frac{2a\sqrt{1+s^2}\sqrt{a^2+s^2}}{a^2+s^2} & \text{ヒ} & \frac{1}{\sqrt{3}}a \\ \\ \text{フ} & \left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)a & & & & \end{array}$$

[解説]

楕円 C と直線 l の式から y を消去して、

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{(-sx+t)^2}{a^2} &= 1 & \cdots \text{①} \\ \Leftrightarrow (a^2+s^2)x^2 - 2stx + t^2 - a^2 &= 0 \end{aligned}$$

となる。①式の判別式を D として、 $D \geq 0$ であれば楕円 C と直線 l は共有点をもつ。

よって

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (st)^2 - (a^2+s^2)(t^2-a^2) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^4 + a^2s^2 &\geq a^2t^2 \end{aligned}$$

である。 $a^2 > 0$ より、両辺を a^2 で割って

$$a^2 + s^2 \geq t^2$$

となる。

①を x について解くと、

$$x = \frac{st \pm a\sqrt{a^2+s^2-t^2}}{a^2+s^2}$$

である。 $x_1 \leq x_2$ であるから、

$$x_1 = \frac{st - a\sqrt{a^2+s^2-t^2}}{a^2+s^2}, \quad x_2 = \frac{st + a\sqrt{a^2+s^2-t^2}}{a^2+s^2}$$

である。点 A, B の y 座標を y_1, y_2 とおくと、どちらも直線 l 上の点であるから、

$$\begin{aligned} y_1 &= -s \cdot \frac{st - a\sqrt{a^2+s^2-t^2}}{a^2+s^2} + t \\ &= \frac{a^2t + as\sqrt{a^2+s^2-t^2}}{a^2+s^2} \\ y_2 &= -s \cdot \frac{st + a\sqrt{a^2+s^2-t^2}}{a^2+s^2} + t \\ &= \frac{a^2t - as\sqrt{a^2+s^2-t^2}}{a^2+s^2} \end{aligned}$$

となる。

よって点 A, B の座標はそれぞれ

$$\begin{aligned} A &\left(\frac{st - a\sqrt{a^2+s^2-t^2}}{a^2+s^2}, \frac{a^2t + as\sqrt{a^2+s^2-t^2}}{a^2+s^2} \right), \\ B &\left(\frac{st + a\sqrt{a^2+s^2-t^2}}{a^2+s^2}, \frac{a^2t - as\sqrt{a^2+s^2-t^2}}{a^2+s^2} \right) \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2a\sqrt{a^2+s^2-t^2}}{a^2+s^2} \right)^2 + \left(\frac{2as\sqrt{a^2+s^2-t^2}}{a^2+s^2} \right)^2} \\ &= \frac{2a\sqrt{1+s^2}\sqrt{a^2+s^2-t^2}}{a^2+s^2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} d &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+\frac{s^2-t^2}{a^2}}}{1+\frac{s^2}{a^2}} \\ &= \frac{2\sqrt{1+s^2} \cdot 1}{1} \\ &= 2\sqrt{1+s^2} \end{aligned}$$

となる。

a, s を固定して考えると、 d は t にのみ依存する。よって t^2 が最小の時 d は最大値をとる。

$0 \leq t^2 \leq a^2 + s^2$ であるから $t^2 = 0$ 、すなわち $t = 0$ のとき d は最大値をとり、その値は

$$\frac{2a\sqrt{1+s^2}\sqrt{a^2+s^2}}{a^2+s^2}$$

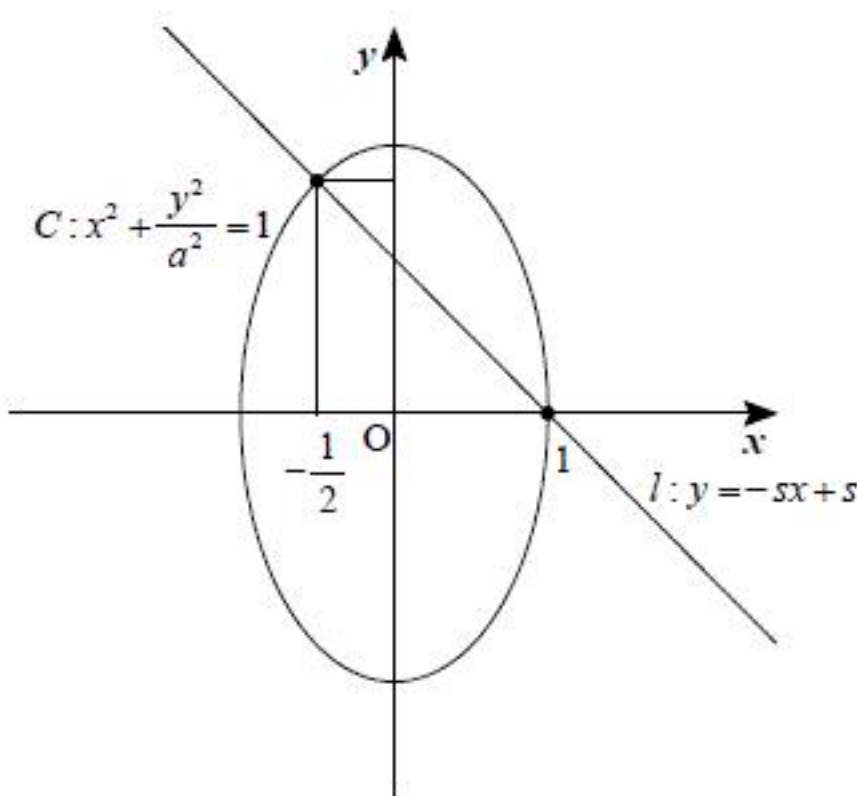
である。

$t = s$ とおくと、 $x_1 = \frac{s^2 - a^2}{a^2 + s^2}$ であるから、 $x_1 = -\frac{1}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} &= \frac{s^2 - a^2}{a^2 + s^2} \\ \Leftrightarrow a^2 + s^2 &= 2a^2 - 2s^2 \\ \Leftrightarrow s^2 &= \frac{1}{3}a^2 \end{aligned}$$

である。 $a > 0, s > 0$ より $s = \frac{1}{\sqrt{3}}a$ となる。

またこのとき楕円 C と直線 l のグラフは以下ようになる。



よって楕円 C の下部にあり、かつ直線 l の上部にある部分の面積を求める。

楕円 C の式を y について解くと、 $y = \pm a\sqrt{1-x^2}$ である。 $y > 0$ の部分を y_+ とおく。

求める面積を S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 \left\{ a\sqrt{1-x^2} - (-sx+s) \right\} dx \\ &= a \int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx + s \int_{-\frac{1}{2}}^1 (x-1) dx \\ &= a \int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx + \frac{1}{\sqrt{3}} a \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_{-\frac{1}{2}}^1 \\ &= a \int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx - \frac{3\sqrt{3}}{8} a \end{aligned}$$

となる。ここで $\int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ は円 $x^2 + y^2 = 1$ の上半分の $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ の部分の面積だから、

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right)$$

である。よって

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) a - \frac{3\sqrt{3}}{8} a \\ &= \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) a \end{aligned}$$

である。

IV

$$[1] \quad \begin{array}{ccccccc} \text{ヘ} & \frac{49}{2} & \text{ホ} & 2 & \text{マ} & \frac{9}{2} & \ni & \frac{1}{2}\left(n+\frac{50}{n}-2\right) \\ & & \text{ム} & 5 & \text{メ} & 10 & \text{モ} & \frac{13}{2} \end{array}$$

$$[2] \quad \text{ヤ} \quad \sqrt{N} \quad \text{ユ} \quad \sqrt{N}-1$$

[解説]

[1]

(a)

引くカードの数字を k ($0 \leq k \leq 49$) とする。このとき渡す商品券は k 枚であり、各カードを引く確率は全て等しいから $\frac{1}{50}$ である。よって商品券の枚数の期待値は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{49} \frac{k}{50} &= \frac{1}{50} \times \frac{1}{2} \times 49 \times (49+1) \\ &= \frac{49}{2} \end{aligned}$$

である。

(b)

$5m \leq k \leq 5m+4$ ($0 \leq m \leq 9$) の場合について考える。

このとき 5000 円の商品券の枚数は m 枚、1000 円の商品券の枚数は $k-5m$ 枚である。

$5m \leq k \leq 5m+4$ の範囲での、1000 円の商品券の枚数の期待値は

$$\frac{1}{50}(0+1+2+3+4) = \frac{1}{5}$$

5000 円の商品券の枚数の期待値は

$$\frac{1}{50} \cdot m \times 5 = \frac{1}{10} m$$

である。これを $0 \leq m \leq 9$ の m について足していけばよく、

1000 円の商品券の枚数の期待値は

$$\sum_{m=0}^9 \frac{1}{5} = 10 \cdot \frac{1}{5} = 2$$

5000 円の商品券の枚数の期待値は

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^9 \frac{1}{10} m &= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

となる。

(c)

(b)同様に考える。

$nm \leq k \leq n(m+1)-1$ ($0 \leq m \leq \frac{50}{n}-1$) の場合について考える。

このとき $1000 \times n$ 円の商品券の枚数は m 枚、1000 円の商品券の枚数は $k-nm$ 枚である。

$nm \leq k \leq n(m+1)-1$ の範囲での、1000 円の商品券の枚数の期待値は

$$\frac{1}{50}(0+1+2+\cdots+(n-1)) = \frac{1}{100} n(n-1)$$

$1000 \times n$ 円の商品券の枚数の期待値は

$$\frac{1}{50} \cdot m \times n = \frac{1}{50} nm$$

である。これを $0 \leq m \leq \frac{50}{n}-1$ の m について足していくと、

1000 円の商品券の枚数の期待値は

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\frac{50}{n}-1} \frac{1}{100} n(n-1) &= \frac{1}{100} n(n-1) \cdot \frac{50}{n} \\ &= \frac{n-1}{2} \end{aligned}$$

$1000 \times n$ 円の商品券の枚数の期待値は

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\frac{50}{n}-1} \frac{1}{50} nm &= \frac{1}{50} n \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{50}{n} - 1 \right) \cdot \frac{50}{n} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{50}{n} - 1 \right) \end{aligned}$$

となる。よって合計枚数の期待値は

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{50}{n} - 1 \right) \\ = \frac{1}{2} \left(n + \frac{50}{n} - 2 \right) \end{aligned}$$

となる。 $f(n) = \frac{1}{2} \left(n + \frac{50}{n} - 2 \right)$ とおくと、

$$\begin{aligned} f'(n) &= \frac{1}{2} - \frac{25}{n^2} \\ &= \frac{n^2 - 50}{2n^2} \end{aligned}$$

であるから増減表は以下ようになる。

n	0	...	$5\sqrt{2}$	...	50
$f'(n)$		-	0	+	
$f(n)$		↘	極小	↗	

n は $1 < n < 50$ なる整数で、50 の約数であるから、 $n = 5\sqrt{2}$ 付近の 50 の約数について調べる。

$n = 5$ のとき

$$\begin{aligned} f(5) &= \frac{1}{2} \left(5 + \frac{50}{5} - 2 \right) \\ &= \frac{13}{2} \end{aligned}$$

$n = 10$ のとき

$$\begin{aligned} f(10) &= \frac{1}{2} \left(10 + \frac{50}{10} - 2 \right) \\ &= \frac{13}{2} \end{aligned}$$

よって $n = 5$ または $n = 10$ のとき最小値 $\frac{13}{2}$ をとる。

[2]

[1](c)同様に考える。 $nm \leq k \leq n(m+1)-1$ ($0 \leq m \leq \frac{N}{n}-1$) の場合について考える。

このとき $1000 \times n$ 円の商品券の枚数は m 枚、1000 円の商品券の枚数は $k-nm$ 枚である。

$nm \leq k \leq n(m+1)-1$ の範囲での、1000 円の商品券の枚数の期待値は

$$\frac{1}{N}(0+1+2+\cdots+(n-1)) = \frac{1}{2N} n(n-1)$$

$1000 \times n$ 円の商品券の枚数の期待値は

$$\frac{1}{N} \cdot m \times n = \frac{1}{N} nm$$

である。

$0 \leq m \leq \frac{N}{n}-1$ で考えて1000 円の商品券の枚数の期待値は

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\frac{N}{n}-1} \frac{1}{2N} n(n-1) &= \frac{1}{2N} n(n-1) \cdot \frac{N}{n} \\ &= \frac{(n-1)}{2} \end{aligned}$$

$1000 \times n$ 円の商品券の枚数の期待値は

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\frac{N}{n}-1} \frac{1}{N} nm &= \frac{1}{N} n \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{N}{n} - 1 \right) \cdot \frac{N}{n} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{N}{n} - 1 \right) \end{aligned}$$

となる。よって合計枚数の期待値は

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{N}{n} - 1 \right) \\ = \frac{1}{2} \left(n + \frac{N}{n} - 2 \right) \end{aligned}$$

である。 $n > 0$, $\frac{N}{n} > 0$ より、相加相乗平均の関係から

$$n + \frac{N}{n} \geq 2\sqrt{n \cdot \frac{N}{n}} = 2\sqrt{N}$$

である。等号成立は $n = \frac{N}{n} \Leftrightarrow n = \sqrt{N}$ の場合である。条件より、 $\sqrt{N}$ は整数であるから、渡

す商品券の合計の期待値は、 $n = \sqrt{N}$ で最小値をとる。その値は、

$$\frac{1}{2}(2\sqrt{N}-2) = \sqrt{N}-1$$

となる。