

ア	2	イ	$-\frac{1}{2}$	ウ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	エ	$\sqrt{2}$	オ	60
カ	$\sqrt{6}$	キ	$\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$	ク	$\sqrt{3}$	ケ	3	コ	$\sqrt{3}$
サ	$\sqrt{3}$	シ	$\frac{3}{2}$	ス	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	セ	2	ソ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
タ	$\frac{1}{3}$	チ	$\frac{1}{3}s$	ツ	$\frac{1}{3}t$	テ	$\frac{1}{3}u$	ト	$\frac{\sqrt{3}}{18}$
ナ	$\frac{1}{162}$	ニ	8						

【解説】

[1]

余弦定理より

$$\begin{aligned}AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B \\&= \left(\sqrt{3}-1\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 - 2\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{6}\right) \cos 45^\circ \\&= 4\end{aligned}$$

$$\therefore AC=2$$

となる。また

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \\&= \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2 + 2^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2}{2\left(\sqrt{3}-1\right) \cdot 2} \\&= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となるため $\angle A=120^\circ$ である。したがって

$$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。また $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とおくと、正弦定理より

$$\begin{aligned}\frac{BC}{\sin A} &= 2R \\ \Leftrightarrow R &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。点 A, B, D, C はすべてこの外接円上にあるので $\angle BDC$ は

$$\begin{aligned}\angle BDC &= 180^\circ - \angle A \\&= 60^\circ\end{aligned}$$

となる。四角形 ABDC の面積が最大となるのは $\triangle BCD$ の面積が最大となるときであり、このとき $\triangle BCD$ は $DB=DC$ の二等辺三角形となる。すると

$$\angle DBC = \angle DCB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BDC) = 60^\circ$$

より、 $\triangle BCD$ は 1 辺の長さが $\sqrt{6}$ の正三角形となる。よって、

$$CD = \sqrt{6}$$

であり、

$$\begin{aligned}\triangle BCD &= \frac{1}{2} BD \cdot CD \sin D \\&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \sin 60^\circ \\&= \frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin 45^\circ \\&= \frac{1}{2} \left(\sqrt{3}-1\right) \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\&= \frac{3-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

より、四角形 ABDC の最大面積は

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3-\sqrt{3}}{2} = \frac{3+2\sqrt{3}}{2}$$

である。

[2]

C_1 の半径は $\sqrt{3}$ なので、 C_1 の方程式は

$$x^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 = 3$$

となる。接線 l の方程式を $y = \sqrt{3}x + k$ ($k < 0$) とおく。

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{3}x + k \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{\sqrt{3}}(y - k)\end{aligned}$$

より C_1 の方程式に代入すると

$$\begin{aligned}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(y - k)\right\}^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow 4y^2 - 2\left(k + 3\sqrt{3}\right)y + k^2 &= 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。 C_1 と l は接するので、この判別式を D とおくと

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(k + 3\sqrt{3}\right)^2 - 4k^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow k^2 - 2\sqrt{3}k - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(k - 3\sqrt{3}\right)\left(k + \sqrt{3}\right) &= 0\end{aligned}$$

となるから、 $k < 0$ より

$$k = -\sqrt{3}$$

となる。よって、接線 l の方程式は

$$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$$

である。 k の値をを①に代入することにより、接点 P の y 座標は

$$\begin{aligned}4y^2 - 4\sqrt{3}y + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(2y - \sqrt{3}\right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となる。また x 座標は

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{\sqrt{3}}(y - k) \\&= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

となる。つまり P の座標は $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。

P と C_1 の中心を結ぶ直線は

$$\begin{aligned}y &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}}{\frac{3}{2} - 0}x + \sqrt{3} \\&= -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。 C_2 の中心を (s, t) とおくと、中心はこの直線上にあるので

$$t = -\frac{\sqrt{3}}{3}s + \sqrt{3}$$

が成り立つ。また、 C_2 の中心と接線 l との距離は C_2 の半径 t に等しい。 l の方程式は

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{3}x - \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} &= 0\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}\frac{\left|\sqrt{3}s - t - \sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(-1\right)^2}} &= t \\ \Leftrightarrow \frac{\left|\sqrt{3}s - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}s + \sqrt{3}\right) - \sqrt{3}\right|}{2} &= -\frac{\sqrt{3}}{3}s + \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \left|2s - 3\right| &= -s + 3\end{aligned}$$

となる。 $s > \frac{3}{2}$ から $2s - 3 > 0$ となるので

$$\begin{aligned}\left|2s - 3\right| &= -s + 3 \\ \Rightarrow 2s - 3 &= -s + 3 \\ \Leftrightarrow s &= 2 \\ \therefore t &= \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

となる。以上から C_2 の方程式は

$$\left(x - 2\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

となる。

[3]

$\triangle PQR$ において $QL:LN = x:1-x$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PL} &= (1-x)\overrightarrow{PQ} + x\overrightarrow{PN} \\&= (1-x)\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}x\overrightarrow{PR}\end{aligned}$$

となる。また、同様にして、実数 y を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PL} &= (1-y)\overrightarrow{PM} + y\overrightarrow{PR} \\&= \frac{1}{2}(1-y)\overrightarrow{PQ} + y\overrightarrow{PR}\end{aligned}$$

と表すこともできる。 $\overrightarrow{PQ}$ 、 $\overrightarrow{PR}$ は一次独立なので、係数を比較して

$$\begin{cases}1-x = \frac{1}{2}(1-y) \\ \frac{1}{2}x = y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3}\end{cases}$$

となる。つまり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AL} &= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PL} \\&= \overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PR} \\&= \overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}\right) + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP}\right) \\&= \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{c}\end{aligned}$$

となる。

次に、 $s=t=u=\frac{1}{3}$ のとき

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{AQ}\right| = \left|\overrightarrow{AR}\right| = \frac{1}{3}$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{PR}\right| = \left|\overrightarrow{QR}\right| = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

となる。このとき $\triangle PQR$ は 1 辺が $\frac{\sqrt{2}}{3}$ の正三角形となるので、その面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot PR \cdot \sin 60^\circ \\&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\&= \frac{\sqrt{3}}{18}\end{aligned}$$

となる。また $\angle PAQ = \angle PAR = 90^\circ$ より四面体 APQR の体積は、

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} AP \cdot AR\right) \cdot AQ = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{162}$$

となる。また $s=t=u=\frac{1}{3}$ のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AL} &= \frac{1}{9}\overrightarrow{a} + \frac{1}{9}\overrightarrow{b} + \frac{1}{9}\overrightarrow{c} \\&= \frac{1}{9}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) \\&= \frac{1}{9}\overrightarrow{AG}\end{aligned}$$

より、

$$AL:LG = 1:(9-1) = 1:8$$

である。

【解説】

〔1〕

$$(30 - 10) \cdot 1.1 = 22 \text{ 万円}$$

となる。

〔2〕

2002 年 1 月の時点で

$$(30 - 20) \cdot 1.1 = 11 \text{ 万円}$$

となる。したがって 2002 年 12 月の段階での預金残高は

$$11 + 30 - 20 = 21 \text{ 万円}$$

となる。

〔3〕

 $(2000 + n + 1)$ 年 1 月の時点での預金残高は $1.1a_n$ となる。したがって

$$a_{n+1} = 1.1a_n + 30 - c$$

となる。

〔4〕

 $a_{n+1} = 1.1a_n + 30 - c$ に関して特性方程式を解くと

$$x = 1.1x + 30 - c$$

$$\Leftrightarrow x = 10c - 300$$

となる。したがって

$$a_{n+1} = 1.1a_n + 30 - c$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - (10c - 300) = 1.1 \{a_n - (10c - 300)\}$$

となる。ここで 2001 年 12 月末の預金残高は

$$a_1 = 30 - c$$

であるため

$$\begin{aligned} a_1 - (10c - 300) &= 30 - c - (10c - 300) \\ &= 1.1(300 - 10c) \end{aligned}$$

となる。以上から数列 $\{a_n - (10c - 300)\}$ は、初項 $1.1(300 - 10c)$ 、項比 1.1 の等比数列となるの

で

$$a_n - (10c - 300) = 1.1(300 - 10c) \cdot 1.1^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow a_n = (300 - 10c)(1.1^n - 1)$$

となる。

〔5〕

$$a_{33} = 2210$$

$$\Leftrightarrow (300 - 10c)(1.1^{33} - 1) = 2210$$

$$\Leftrightarrow (300 - 10c)(1.1 \cdot 21 - 1) = 2210$$

$$\Leftrightarrow 6630 - 221c = 2210$$

$$\Leftrightarrow c = 20 \text{ 万円}$$

となる。

Ⅲ

[1]

$a^x > 0, a^{-x} > 0$ より相加相乗平均の公式を用いると

$$a^x + a^{-x} \geq 2\sqrt{a^x \cdot a^{-x}} = 2$$

となる。等号成立は

$$\begin{aligned} a^x &= a^{-x} \\ \Leftrightarrow a^{2x} &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

となる。以上から $a^x + a^{-x}$ は $x=0$ で最小値 2 を取る。

(答) $x=0$ で最小値 2

[2]

[1] の結果から $2 \leq a^x + a^{-x}$ は常に成立する。ここで、 $X = a^x$ とおくと、 $X > 0$ であるので

$$\begin{aligned} a^x + a^{-x} &\leq 8 \\ \Leftrightarrow X + \frac{1}{X} &\leq 8 \\ \Leftrightarrow X^2 - 8X + 1 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 4 - \sqrt{15} &\leq X \leq 4 + \sqrt{15} \\ \Leftrightarrow 4 - \sqrt{15} &\leq a^x \leq 4 + \sqrt{15} \\ \Leftrightarrow \log_a(4 - \sqrt{15}) &\leq x \leq \log_a(4 + \sqrt{15}) \end{aligned}$$

となる。以上から

$$a^x \text{ の取りうる範囲は } 4 - \sqrt{15} \leq a^x \leq 4 + \sqrt{15}$$

$$x \text{ の取りうる範囲は } \log_a(4 - \sqrt{15}) \leq x \leq \log_a(4 + \sqrt{15})$$

となる。

$$(答) \quad 4 - \sqrt{15} \leq a^x \leq 4 + \sqrt{15}$$

$$\log_a(4 - \sqrt{15}) \leq x \leq \log_a(4 + \sqrt{15})$$

[3]

$$\begin{aligned} 0 &\leq \log_a y + x \leq \log_a 2 \\ \Leftrightarrow -x &\leq \log_a y \leq \log_a 2 - x \end{aligned}$$

となる。ここで、[2] から

$$-\log_a(4 + \sqrt{15}) \leq -x \leq -\log_a(4 - \sqrt{15})$$

であるので

$$-\log_a(4 + \sqrt{15}) \leq -x \leq \log_a y \leq \log_a 2 - x \leq \log_a 2 - \log_a(4 - \sqrt{15})$$

となる。底 $a > 1$ より $\log_a y$ が最小値をとるとき y も最小値を、 $\log_a y$ が最大値をとるとき y も最大値をとる。 $\log_a y$ が最大、つまり y が最大るとき

$$\begin{aligned} \log_a y &= \log_a 2 - \log_a(4 - \sqrt{15}) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{2}{4 - \sqrt{15}} = 8 + 2\sqrt{15} \end{aligned}$$

となる。このとき $x = \log_a(4 - \sqrt{15})$ である。また、 $\log_a y$ が最小、つまり y が最小のとき

$$\begin{aligned} \log_a y &= -\log_a(4 + \sqrt{15}) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{4 + \sqrt{15}} = 4 - \sqrt{15} \end{aligned}$$

となる。このとき $x = \log_a(4 + \sqrt{15})$ である。

$$(答) \quad x = \log_a(4 - \sqrt{15}) \text{ のとき最大値 } y = 8 + 2\sqrt{15}$$

$$x = \log_a(4 + \sqrt{15}) \text{ のとき最小値 } y = 4 - \sqrt{15}$$