

I

〔解答〕

(1)

ア	イ	ウ	エ
$s+t$	$t+u$	$s+2t+u$	正の実数

(2)

オ	カ	キ	ク
$-\frac{(t+15)(t-2)}{(t+10)(t+3)}$	2	90°	45°

〔解説〕

(1)

点 O は $\triangle ABC$ の外心なので、L, M, N はそれぞれ AB, BC, CA の中点である。したがって、

$$\overrightarrow{OL} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}, \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}, \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}}{2}$$

となる。これらを(*)に代入すると

$$s \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} + t \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} + u \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}}{2} = \vec{0}$$

$$\therefore (s+u)\overrightarrow{OA} + (s+t)\overrightarrow{OB} + (t+u)\overrightarrow{OC} = \vec{0} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。

また、点 D は辺 BC を $(t+u):(s+t)$ に内分する点だから、 $\textcircled{1}$ に注意すると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \frac{(s+t)\overrightarrow{OB} + (t+u)\overrightarrow{OC}}{(t+u) + (s+t)} \\ &= \frac{(s+t)\overrightarrow{OB} + (t+u)\overrightarrow{OC}}{s+2t+u} \\ &= -\frac{s+u}{s+2t+u} \overrightarrow{OA} \end{aligned}$$

となる。よって、3 点 O, A, D は一直線上にあることが分かり、D は辺 BC 上の点であるから、点 O が $\triangle ABC$ の内部にあるためには、点 A, D の間に点 O があればよい。したがって

$$-\frac{s+u}{s+2t+u} < 0$$

である。条件より $s+t, t+u$ は正の実数であることに注意して整理すると

$$s+u > 0$$

となる。ゆえに、点 O が $\triangle ABC$ の内部にあるためには、 $s+u > 0$ が必要十分条件である。

(2)

$\textcircled{1}$ 式に $s=10, u=3, t>-3$ を代入すると

$$13\overrightarrow{OA} + (t+10)\overrightarrow{OB} + (t+3)\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

となる。 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$ に注意して整理すると

$$\begin{aligned} (t+10)\overrightarrow{OB} + (t+3)\overrightarrow{OC} &= -13\overrightarrow{OA} \\ \Leftrightarrow |(t+10)\overrightarrow{OB} + (t+3)\overrightarrow{OC}|^2 &= |-13\overrightarrow{OA}|^2 \\ \Leftrightarrow (t+10)^2 + 2(t+10)(t+3)\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + (t+3)^2 &= 169 \\ \therefore \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= -\frac{(t+15)(t-2)}{(t+10)(t+3)} \end{aligned}$$

となる。 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ となるのは、 $t > -3$ かつ $(t+15)(t-2) = 0$ 、すなわち、

$$t = 2$$

のときである。このとき、 $\angle BOC = 90^\circ$ であって、 $s+u = 13 > 0$ なので、〔1〕の結果から、点 O は $\triangle ABC$ の内部にある。したがって、円周角の定理により

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = 45^\circ$$

となる。

II

〔解答〕

(1)

ケ	コ
$2s$	$-\frac{1}{4}$

(2)

サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
$-\frac{1}{2t}$	$t^2 + \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2u}$	$u^2 + \frac{1}{2}$	s	$4s^2 + \frac{3}{4}$	4	$\frac{3}{4}$

(3)

テ	ト	ナ	ニ
$\frac{s}{2} - \frac{3}{32s}$	$\frac{s^2}{4} + \frac{9}{1024s^2} + \frac{5}{32}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{2}$

〔解説〕

(1)

放物線 $C_1: y = x^2$ 上の点 (X, X^2) における接線を l とすると、 $y' = 2x$ より l の方程式は

$$y - X^2 = 2X(x - X) \quad \therefore y = 2Xx - X^2$$

となる。これが点 $P\left(s, -\frac{1}{4}\right)$ を通るとき

$$-\frac{1}{4} = 2Xs - X^2 \Leftrightarrow X^2 - 2sX - \frac{1}{4} = 0$$

となり、この X についての 2 次方程式の異なる 2 つの実数解が t, u となる。したがって、解と係数の関係から

$$t + u = 2s, tu = -\frac{1}{4}$$

と求まる。

(2)

$tu = -\frac{1}{4}$ より、 $t \neq 0, u \neq 0$ である。直線 m_1 は点 Q において直線 l_1 と直交するから、傾き $-\frac{1}{2t}$

で点 (t, t^2) を通り、その式は

$$m_1: y - t^2 = \left(-\frac{1}{2t}\right)(x - t) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}$$

となる。同様にして

$$m_2: y - u^2 = \left(-\frac{1}{2u}\right)(x - u) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2u}x + u^2 + \frac{1}{2}$$

となる。 m_1, m_2 の式を連立して解くと

$$\begin{cases} x = -2(u+t)ut = -2 \cdot 2s \cdot \frac{-1}{4} = s \\ y = (t^2 + tu + u^2) + \frac{1}{2} = \{(t+u)^2 - tu\} + \frac{1}{2} = \left(4s^2 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = 4s^2 + \frac{3}{4} \end{cases}$$

となるので、交点 S の座標は $S\left(s, 4s^2 + \frac{3}{4}\right)$ となり、点 S の軌跡は曲線

$$C_2: y = 4x^2 + \frac{3}{4}$$

を描く。

(3)

C_2 の点 $S\left(s, 4s^2 + \frac{3}{4}\right)$ における接線は $y' = 8x$ より

$$\begin{aligned} y - \left(4s^2 + \frac{3}{4}\right) &= 8s(x - s) \\ \Leftrightarrow y &= 8sx - 4s^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

となるので、これと x 軸の交点 T の座標は $T\left(\frac{s}{2} - \frac{3}{32s}, 0\right)$ となる。これと $P\left(s, -\frac{1}{4}\right)$ から

$$d^2 = \left(\frac{s}{2} - \frac{3}{32s} - s\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{s^2}{4} + \frac{5}{32} + \frac{9}{1024s^2}$$

となる。 $s^2 > 0$ なので、相加・相乗平均の関係より

$$d^2 \geq 2\sqrt{\frac{s^2}{4} \cdot \frac{9}{1024s^2}} + \frac{5}{32} = \frac{1}{4}$$

(等号成立条件は $\frac{s^2}{4} = \frac{9}{1024s^2}$ かつ $s > 0$ 、すなわち $s = \frac{\sqrt{3}}{4}$ のとき。)

となる。ゆえに d は $s = \frac{\sqrt{3}}{4}$ のとき最小値 $\frac{1}{2}$ をとる。

III

〔解答〕

(1)

ヌ	ネ
$\frac{87}{91}$	$\frac{1}{5}$

(2)

ノ
90

(3)

ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ
$-\frac{b}{2a}$	$c-\frac{b^2}{4a}$	$\frac{7}{30}$	$-\frac{b}{2c}$	$\frac{b^2}{4c}+c$	$\frac{7}{30}$	0

〔解説〕

全ての取り出し方の総数は、 $15 \cdot 14 \cdot 13$ 通りである。

(1)

作られた数字が6桁になるのは、 a, b, c ともに2桁の数字の場合で、その場合の数は

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \text{ (通り)}$$

である。したがって、作られた数字が5桁以下の数字になる確率は

$$1 - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{87}{91}$$

となる。

作られた数字が5で割り切れるのは、 c が5の倍数、すなわち5, 10, 15のときで、 a, b, c の取り出し方は

$$3 \cdot 14 \cdot 13 \text{ (通り)}$$

ある。したがって、作られた数字が5で割り切れる確率は

$$\frac{3 \cdot 14 \cdot 13}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{1}{5}$$

となる。

(2)

条件より $a \neq b$ なので、まず $a > b$ の場合を考える。

$$a + b > 16$$

より、 $a > 8$ である。 $c = 5$ より a, b は5をとらないことに注意すると、各 a に対して、 b の取りうる値の個数は下表のようになる。

a	9	10	11	12	13	14	15
b の取り得る値の個数	1	3	5	6	8	10	12

したがって、全部で、45通りある。対称性から、 $a < b$ の場合も同様に45通り存在する。よって、条件を満たす (a, b) の組み合わせは $45 + 45 = 90$ 通り存在する。

(3)

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

であり、 $a > 0$ より $f(x)$ は $x = -\frac{b}{2a}$ のとき最小値 $c - \frac{b^2}{4a}$ をとる。

$$-\frac{b}{2a} < -1 \Leftrightarrow a < \frac{b}{2} \leq \frac{15}{2} < 8$$

であり、各 a の値に対して $a < \frac{b}{2}$ を満たす b の値は下表のようになる。

a	1	2	3	4	5	6	7
b の取り得る値の個数	13	11	9	7	5	3	1

したがって、全部で49通り存在し、さらに各 (a, b) の組に対して c の選び方は13通りあるから、 $-\frac{b}{2a} < -1$ となるような確率は

$$\frac{49 \cdot 13}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{7}{30}$$

である。

$$g(x) = -cx^2 - bx + c = -c \left(x + \frac{b}{2c} \right)^2 + c + \frac{b^2}{4c}$$

であり、 $g(x)$ は $x = -\frac{b}{2c}$ のとき最大値 $c + \frac{b^2}{4c}$ をとる。 $-\frac{b}{2c} < -1$ より $c < \frac{b}{2}$ となるが、これは

$a < \frac{b}{2}$ となる場合の確率と等しいので、 $-\frac{b}{2c} < -1$ となる確率は $\frac{7}{30}$ である。

また、 $c - \frac{b^2}{4a} \geq c + \frac{b^2}{4c}$ のとき $b^2 \left(\frac{1}{4a} + \frac{1}{4c} \right) \leq 0$ となるが、これを満たす自然数 a, b, c は存

在しないので、 $c - \frac{b^2}{4a} \geq c + \frac{b^2}{4c}$ となる確率は0である。

IV

〔解答〕

(1)

ム	メ	モ	ヤ
$2-t$	$1-\frac{t}{2}$	$4-2t$	$\frac{1}{2}(2-t)^2$

(2)

ユ	ヨ	ラ	リ	ル
$\frac{2}{3}$	$4t(1-t)$	$\frac{4}{3}$	t	$\frac{1}{2}(4-3t)^2$

(3)

レ
$\frac{7}{9}$

〔解説〕

(1)

線分 QA と平面 $z=t$ の交点は、 AQ を $t:(2-t)$ に内分する点だから、その座標は

$$\frac{(2-t)\overline{OA}+t\overline{OQ}}{2}=\begin{pmatrix} 2-t \\ 1-\frac{t}{2} \\ t \end{pmatrix}$$

となる。点 A^* はこの座標を xy 平面上に投射して得られるから

$$A^*\left(2-t, 1-\frac{t}{2}, 0\right)$$

である。同様にして

$$B^*\left(2-t, \frac{t}{2}-1, 0\right), E^*(4-2t, 0, 0)$$

となる。したがって $\triangle A^*B^*E^*$ の面積は

$$\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{t}{2}\right)-\left(\frac{t}{2}-1\right)\right\}\{(4-2t)-(2-t)\}=\frac{1}{2}(2-t)^2$$

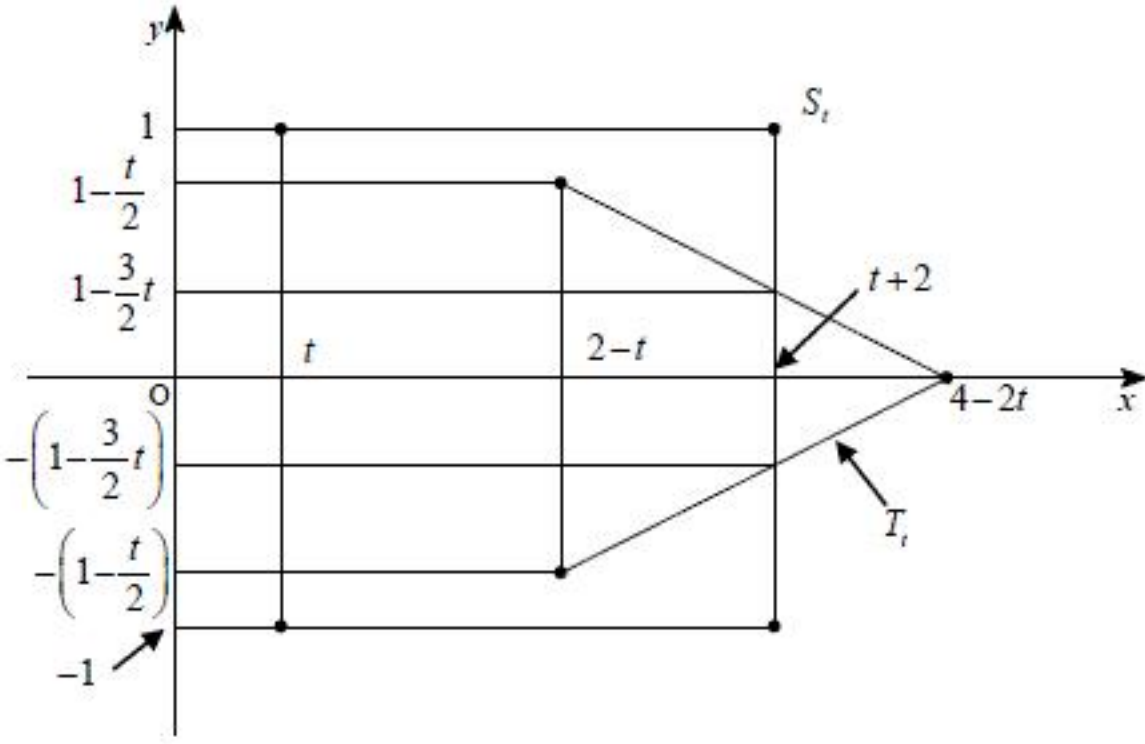
である。

(2)

V_t の面積を $S(t)$ で表す。 S_t と T_t の交わり方に注意して、次のように場合分けをする。

[1] $t+2 < 4-2t$, すなわち $0 \leq t < \frac{2}{3}$ のとき

S_t と T_t は下のグラフのようになる。



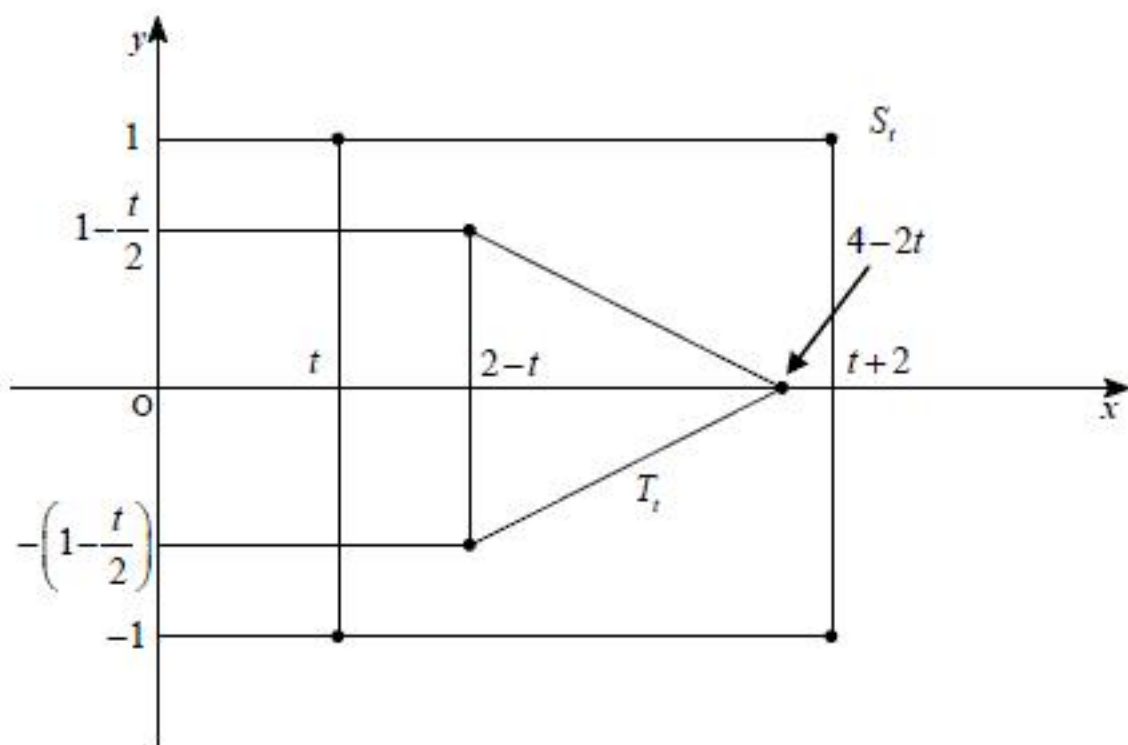
したがって V_t は台形となり

$$S(t)=\frac{1}{2}\{(2-3t)+(2-t)\}\{(t+2)-(2-t)\}=4t(1-t)$$

である。

[2] $t \leq 2-t$ かつ $4-2t \leq t+2$, すなわち $\frac{2}{3} \leq t \leq 1$ のとき

S_t と T_t は下のグラフのようになる。



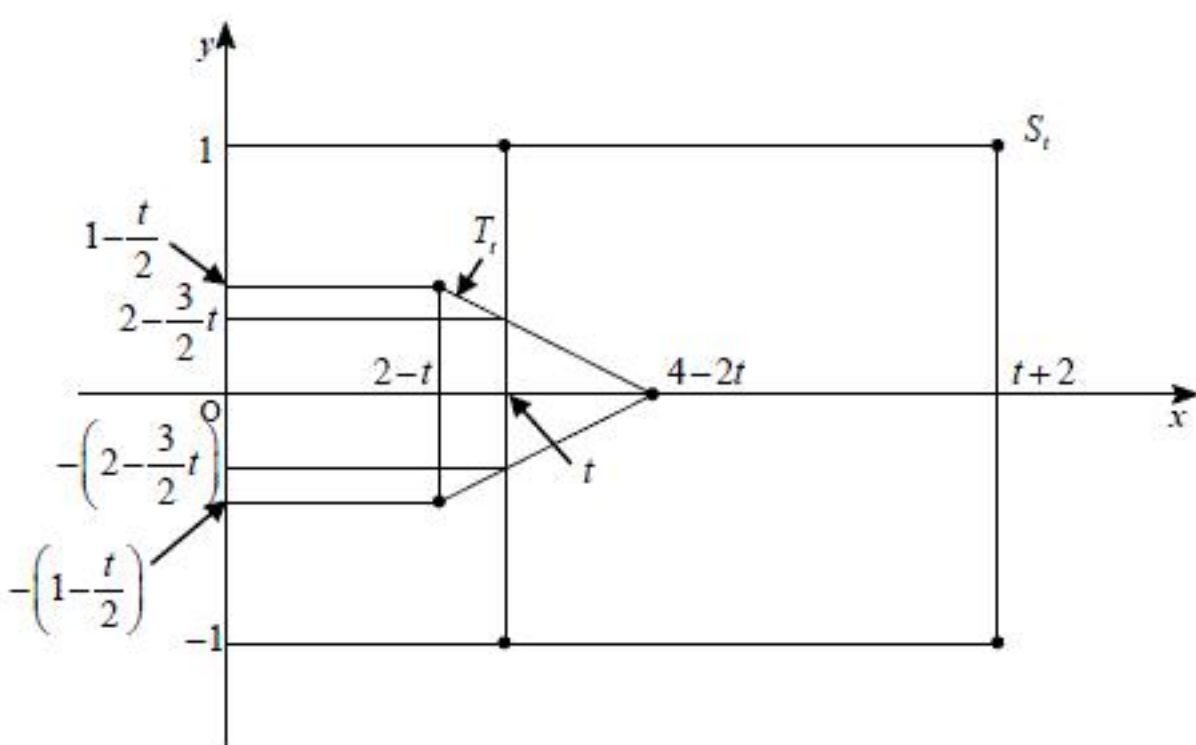
したがって V_t の面積は T_t の面積と等しくなり

$$S(t)=\frac{1}{2}(2-t)^2$$

である。

[3] $2-t < t$ かつ $t \leq 4-2t$, すなわち $1 < t \leq \frac{4}{3}$ のとき

S_t と T_t は下のグラフのようになる。



したがって共通部分は三角形となり、その面積は

$$S(t)=\frac{1}{2}(4-3t)\{(4-2t)-t\}=\frac{1}{2}(4-3t)^2$$

である。

[4] $t > 4-2t$ すなわち $\frac{4}{3} < t \leq 2$ のとき

S_t と T_t は共通部分をもたず、したがって、 $S(t)=0$ である。

(3)

S と T の共通部分 V の体積は

$$\begin{aligned} \int_0^2 S(t) dt &= \int_0^{\frac{2}{3}} 4t(1-t) dt + \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{1}{2}(t-2)^2 dt + \int_1^{\frac{4}{3}} \frac{1}{2}(3t-4)^2 dt + 0 \\ &= \left[2t^2 - \frac{4}{3}t^3 \right]_0^{\frac{2}{3}} + \left[\frac{1}{6}(t-2)^3 \right]_{\frac{2}{3}}^1 + \left[\frac{3}{2}\left(t-\frac{4}{3}\right)^3 \right]_1^{\frac{4}{3}} \\ &= \frac{40}{81} + \frac{37}{162} + \frac{1}{18} = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

である。