

日付 (2月2日) セット (②) 時限 (3)

方式 (全学統一方式 (理系A))

科 目 名 : 数学 (理系)

訂 正 箇 所 : 問 題 3 ページ
上 から 8 行目

訂 正 内 容 : (誤)

$a, \underline{b}, s, t$ を使,て

(正)

a, s, t を使,て

(第3時限：100分)

2013年度 ②

数 学 問 題

(理 系)

(全4ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを、
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ 以下では、 i は虚数単位を表すものとする。

〔1〕

$$\frac{1 + 2\sqrt{2}i}{-2 + 5\sqrt{2}i} = x + yi = \frac{1}{z + wi}$$

を満たす実数 x, y, z, w は $x =$ ア , $y =$ イ , $z =$ ウ ,
 $w =$ エ である。

〔2〕

$$1 + 2\sqrt{2}i = (x + yi)^2$$

となる実数 x, y で、 $x > 0$ となるものを求めよう。両辺の実部と虚部をそれぞれ比較することにより、 x, y は連立方程式

$$\begin{cases} \text{オ} = 1 \\ \text{カ} = \sqrt{2} \end{cases}$$

を満たすことがわかる。 y を消去して x に関する4次方程式 キ $= 0$ を得る。これを解くことによって、

$$1 + 2\sqrt{2}i = \left(\text{ク} + \text{ケ} i \right)^2$$

を得る。

II a, b, c を実数とし, 2 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

を考える。 B には逆行列が存在するとし, さらに

$$AB = B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

が成り立つとすると, $a = \boxed{\text{コ}}$, $b = \boxed{\text{サ}}$, $c = \boxed{\text{シ}}$ となり, このとき, $B^{-1} = \boxed{\text{ス}}$ と書ける。従って, 任意の正の整数 n に対して

$$A^n = \begin{pmatrix} \boxed{\text{セ}} & \boxed{\text{ソ}} \\ \boxed{\text{タ}} & \boxed{\text{チ}} \end{pmatrix}$$

となる。また行列 A^n で表される 1 次変換により, 座標平面上の点 $P(0, 1)$ が点 Q_n に移されるとする。点 Q_n の座標を (x, y) とするとき, x と y には $\boxed{\text{ツ}} = 2$ なる関係式がなりたつ。(注: $\boxed{\text{コ}}$ から $\boxed{\text{ツ}}$ は a, b, c を使わない式とし, $\boxed{\text{ツ}}$ は n を含まない式である。)

Ⅲ a, s を正の実数, t を実数とし, 楕円

$$C: x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

と直線

$$l: y = -sx + t$$

を考える。Cと l が共有点をもつための必要十分条件は, $\boxed{\text{テ}} \geq t^2$ と表せる。
ただし, $\boxed{\text{テ}}$ には, a と s のみの式が入る。このときの共有点を A, B とする。
点 A, B の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 とし, $x_1 \leq x_2$ となっているものとする。この
とき, 点 A, B の座標を a, b, s, t を使って表すと

$$A \left(\frac{\boxed{\text{ト}}}{a^2 + s^2}, \frac{\boxed{\text{ナ}}}{a^2 + s^2} \right), B \left(\frac{\boxed{\text{ニ}}}{a^2 + s^2}, \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{a^2 + s^2} \right)$$

となる。

いま, $x_1 \neq x_2$ であるとして, 点 A と点 B を結んだ線分 AB の長さを d とすると,

$$d = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{a^2 + s^2} \text{ となり, } \lim_{a \rightarrow \infty} d = \boxed{\text{ノ}} \text{ となる。また, } a, s \text{ を固定したときの } d$$

の最大値は $\boxed{\text{ハ}}$ である。

次に $s = t$ としてみる。 $x_1 = -\frac{1}{2}$ となるのは, $s = t = \boxed{\text{ヒ}}$ (a のみの式)
となる場合である。このとき, C と l で囲まれた部分の面積 S は $S = \boxed{\text{フ}}$ と
なる。ただし, そのような部分が 2 つ以上ある場合は, 面積の小さい方を考えるものとする。

IV

[1] 0 から 49 までの数字が 1 つずつ書かれた 50 枚のカードが入った袋を用意する。その袋から 1 枚カードを引いた人に、そのカードに書かれている番号の 1000 倍の金額の商品券を渡すものとする。ただし、準備されている商品券 1 枚の額面には下記の (a), (b), (c) のような場合があり、商品券の枚数の合計が最も少なくなるようにして渡すものとする。

(a) 額面 1000 円の商品券一種類のみを使うとき、渡す商品券の枚数の期待値は である。

(b) 額面が 1000 円と 5000 円の二種類の商品券を使うとき、額面 1000 円の商品券の枚数の期待値は であり、額面 5000 円の商品券の枚数の期待値は である。

(c) n は $1 < n < 50$ なる整数で、50 の約数であるとする。このとき、額面 1000 円と額面 $1000 \times n$ 円の二種類の商品券を使うとき、渡す商品券の合計枚数の期待値は であり、 $n =$ または $n =$ のとき、 は最小値 をとる。

[2] N は 4 以上の整数とし、 $\sqrt{N}$ は整数となるものとする。0 から $N-1$ までの数字が 1 つずつ書かれた N 枚のカードが入った袋を用意し、[1] と同様のルールで商品券を渡すものとする。整数 n を $1 < n < N$ なる N の約数とし、額面 1000 円と額面 $1000 \times n$ 円の二種類の商品券を使うとき、渡す商品券の枚数の合計の期待値は $n =$ のとき最小値 をとる。

