

(第3時限：100分)

2013年度 ⑤

数 学 問 題

(理 系)

(全4ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを，
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ 平面上に中心 O ，半径が 1 の円を考え，その円に三角形 $\triangle ABC$ が内接しているとする。さらに，点 O から辺 AB ， BC ， CA に下ろした垂線の足をそれぞれ L ， M ， N とするとき，ある実数 s ， t ， u によって，以下の等式が成り立っているものとする。

$$s\overrightarrow{OL} + t\overrightarrow{OM} + u\overrightarrow{ON} = \vec{0} \quad \cdots (*)$$

〔1〕 等式 $(*)$ を $\overrightarrow{OA}$ ， $\overrightarrow{OB}$ および $\overrightarrow{OC}$ を使った等式に書き直すと

$$(s + u)\overrightarrow{OA} + \boxed{\text{ア}}\overrightarrow{OB} + \boxed{\text{イ}}\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

となる。いま， $\boxed{\text{ア}}$ も $\boxed{\text{イ}}$ も正の実数である場合を考えよう。

辺 BC を $\boxed{\text{イ}} : \boxed{\text{ア}}$ に内分する点を D とすると，

$$\overrightarrow{OD} = -\frac{s+u}{\boxed{\text{ウ}}}\overrightarrow{OA}$$

となる。このことから，点 O が三角形 $\triangle ABC$ の内部にあるためには $s + u$ が

$\boxed{\text{エ}}$ であることが必要十分条件である。

〔2〕 とくに， $s = 10$ ， $u = 3$ ， $t > -3$ としてみよう。このとき，内積 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$

は t を使って $\boxed{\text{オ}}$ と書き表せ， $t = \boxed{\text{カ}}$ のときに 0 となって，

$\angle BOC = \boxed{\text{キ}}$ ，さらに， $\angle BAC = \boxed{\text{ク}}$ となる。

Ⅱ s を実数とし、座標平面において点 $P\left(s, -\frac{1}{4}\right)$ から放物線

$$C_1: y = x^2$$

に引いた2本の接線を l_1, l_2 とし、その接点をそれぞれ $Q(t, t^2), R(u, u^2)$ とする。

[1] このとき、 $t+u$ は s を使って $t+u = \boxed{\text{ケ}}$ と書ける。

また $tu = \boxed{\text{コ}}$ となる。

[2] 点 Q を通り直線 l_1 と直交する直線を m_1 、また、点 R を通り直線 l_2 と直交する直線を m_2 とすると、 t と u を使って

$$m_1: y = \boxed{\text{サ}}x + \boxed{\text{シ}}$$

および

$$m_2: y = \boxed{\text{ス}}x + \boxed{\text{セ}}$$

と表せる。 m_1 と m_2 の交点を S とすると、その座標は s のみを使って $S\left(\boxed{\text{ソ}}, \boxed{\text{タ}}\right)$ と書き表すことができる。従って、 s が実数の範囲で変化するとき、点 S の軌跡は曲線

$$C_2: y = \boxed{\text{チ}}x^2 + \boxed{\text{ツ}}$$

を描く。

[3] いま s が $s > 0$ の範囲で変化するとしよう。曲線 C_2 の点 S における接線と x 軸との交点を T とすると、 $T\left(\boxed{\text{テ}}, 0\right)$ である。 $d = PT$ とすると、 d^2 は s のみを使って $d^2 = \boxed{\text{ト}}$ と表せる。したがって、 d は $s = \boxed{\text{ナ}}$ のときに最小値 $\boxed{\text{ニ}}$ をとる。

Ⅲ 1 から15までの数字が1 ずつ書かれた玉が入った袋を考える。袋から1 個ずつ玉を取り出し、取り出した玉は袋に戻さないとする。これを3 回くり返して3 つの玉を取り出し、そこに書かれている数字が、取り出した順に a, b, c であるとする。

〔1〕 a, b, c を順番に並べて3 桁から6 桁の数字を作る。たとえば、 $a = 3, b = 13, c = 5$ であるとき、4 桁の数3135 が作れるものとする。このとき、作られた数字が5 桁以下の数字になる確率は であり、作られた数字が5 で割り切れる確率は となる。

〔2〕 $a + b > 16$ かつ $c = 5$ となるように3 つの玉を取り出す場合は、全部で 通りある。

〔3〕 x についての関数

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

を考える。 $f(x)$ は $x =$ のときに最小値 をとる。

< -1 となるような確率は である。さらに、 x についての関数

$$g(x) = -cx^2 - bx + c$$

を考える。 $g(x)$ は $x =$ のとき最大値 をとる。

< -1 となる確率は である。また $\geq$ となる確率は である。

IV 空間の4点 $A(2, 1, 0)$, $B(2, -1, 0)$, $C(0, -1, 0)$, $D(0, 1, 0)$, および、方程式 $z = 2$ で表される平面上の4点 $A'(4, 1, 2)$, $B'(4, -1, 2)$, $C'(2, -1, 2)$, $D'(2, 1, 2)$ を頂点とする角柱を S とする。このとき、正方形 $A'B'C'D'$ は、正方形 $ABCD$ をベクトル $(2, 0, 2)$ 分だけ移動したものになっている。また、点 $E(4, 0, 0)$ および $Q(0, 0, 2)$ をとり、底面が xy 平面上の三角形 $\triangle ABE$, 頂点が Q の三角錐を T とする。

[1] t を $0 \leq t \leq 2$ なる実数とする。方程式 $z = t$ で表される平面と S , および、 T との共通部分を考える。その共通部分の任意の点 $P(x, y, t)$ に対して、 xy 平面上の点 $P'(x, y, 0)$ を考え、点 P' の全体をそれぞれ S_t , T_t とする。このとき、 S_t は不等式 $t \leq x \leq t + 2$, $|y| \leq 1$ で表される領域である。また、 T_t は

$$A'' \left(\boxed{\text{ム}}, \boxed{\text{ヌ}}, 0 \right), B'' \left(\boxed{\text{ム}}, -\boxed{\text{ヌ}}, 0 \right), \\ E'' \left(\boxed{\text{モ}}, 0, 0 \right)$$

を頂点とする三角形で囲まれる境界を含む領域で、その面積は $\boxed{\text{ヤ}}$ である。ただし、 $\boxed{\text{ヌ}} \geq 0$ であるとする。

[2] S_t と T_t の共通部分を V_t とする。まず、 $0 \leq t < \boxed{\text{ユ}}$ のとき、頂点 E'' は正方形 S_t の外部にあり、したがって V_t は台形となり、その面積は $\boxed{\text{ヨ}}$ である。次に $\boxed{\text{ユ}} \leq t \leq 1$ のとき、三角形 T_t は S_t の内部と境界に含まれており、 $V_t = T_t$ となる。したがってその面積は $\boxed{\text{ヤ}}$ である。 $1 < t \leq \boxed{\text{ラ}}$ のとき、辺 $A''B''$ は S_t の外部にあり、 V_t は T_t の $x \geq \boxed{\text{リ}}$ の部分のなす三角形となるので、その面積は $\boxed{\text{ル}}$ となる。最後に、 $\boxed{\text{ラ}} < t \leq 2$ のとき、 S_t と T_t は共通部分をもたない。

[3] 以上の考察から、 S と T の共通部分 V の体積は $\boxed{\text{レ}}$ となる。

