

I

【解答】

ア	$(x+2y)^3-6xy(x+2y)$	イ	$\frac{t}{2}$		
ウ	$\frac{t}{4}$	エ	$\frac{t^2}{8}$	オ	$\frac{t^3}{4}$
カ	$\frac{3}{4}$	キ	$\frac{135}{512}$	ク	$\frac{5}{4}$
ケ	-1	コ	1	サ	3
シ	3	ス	3^n	セ	$\frac{3^n+1}{3^n-1}$

【解説】

〔1〕

$(x+2y)^3$ を計算すると、

$$\begin{aligned}(x+2y)^3 &= x^3+3x^2(2y)+3x(2y)^2+(2y)^3 \\ \Leftrightarrow (x+2y)^3 &= x^3+8y^3+6xy(x+2y) \\ \Leftrightarrow x^3+8y^3 &= (x+2y)^3-6xy(x+2y)\end{aligned}$$

が得られる。次に、 $x+2y=t$ を xy に代入して y を消去すると、

$$\begin{aligned}xy &= x\left(\frac{t-x}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2-tx) \\ &= -\frac{1}{2}\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+\frac{t^2}{8}\end{aligned}$$

となるが、ここで $x>0$ かつ $t>0$ より、最大値を与える x は $x=\frac{t}{2}$ である。このとき、 $y=\frac{t}{4}$ で

あり、最大値は $\frac{t^2}{8}$ である。

また、 $x+2y$ が一定であるとき、 xy が最大値をとるとき x^3+8y^3 は最小値をとるから、これを計算すると、

$$\begin{aligned}x^3+8y^3 &= \left(\frac{t}{2}\right)^3+8\left(\frac{t}{4}\right)^3 \\ &= \frac{t^3}{4}\end{aligned}$$

となる。したがって求める最小値は $\frac{t^3}{4}$ である。

〔2〕

(a)

スペード以外のカードは $13\times 3=39$ 枚であるから、求める確率は、

$$\frac{39}{52}=\frac{3}{4}$$

となる。

(b)

(a)と同様にして、スペードのカードを引く確率は、

$$\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$

となる。5回の試行でちょうど2回スペードを引くのは、どの試行の時にスペードを引くかの組み合わせを考えると、求める確率は、

$$\begin{aligned}{}_5C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3 &= \frac{270}{1024} \\ &= \frac{135}{512}\end{aligned}$$

となる。

(c)

(b)と同様に考えると、全くスペードを引かない確率は、

$${}_5C_0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^5=\frac{243}{1024}$$

となる。ちょうど1回スペードを引く確率は、

$${}_5C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{405}{1024}$$

となる。ちょうど3回スペードを引く確率は、

$${}_5C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{90}{1024}$$

となる。ちょうど4回スペードを引く確率は、

$${}_5C_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{15}{1024}$$

となる。5回すべてスペードを引く確率は、

$${}_5C_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{1024}$$

となる。したがって、期待値を計算すると、

$$\begin{aligned}0\cdot\frac{243}{1024}+1\cdot\frac{405}{1024}+2\cdot\frac{270}{1024}+3\cdot\frac{90}{1024}+4\cdot\frac{15}{1024}+5\cdot\frac{1}{1024} &= \frac{1280}{1024} \\ &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

となる。

〔3〕

$a_{n+1}=\frac{2a_n+1}{a_n+2}$ の a_{n+1} 、 a_n を x と置くことによってできる方程式を解くと、

$$\begin{aligned}x &= \frac{2x+1}{x+2} \\ \Leftrightarrow x(x+2) &= 2x+1 \quad (\text{かつ } x\neq -2) \\ \Leftrightarrow x^2 &= 1 \quad (\text{かつ } x\neq -2) \\ \therefore x &= \pm 1\end{aligned}$$

となる。したがって、 $\alpha=-1$ 、 $\beta=1$ となる。この α 、 β を用いて b_n を考えると b_n の式は、

$$b_n=\frac{a_n+1}{a_n-1}$$

となる。ここで、 b_{n+1} を考えると、

$$\begin{aligned}b_{n+1} &= \frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-1} \\ &= \frac{\frac{2a_n+1}{a_n+2}+1}{\frac{2a_n+1}{a_n+2}-1} \\ &= \frac{2a_n+1+a_n+2}{2a_n+1-(a_n+2)} \\ &= \frac{3a_n+3}{a_n-1} \\ &= 3\frac{a_n+1}{a_n-1} \\ &= 3b_n\end{aligned}$$

となる。したがって、数列 $\{b_n\}$ は公比3の等比数列となる。ここで初項は、

$$\begin{aligned}b_1 &= \frac{a_1+1}{a_1-1} \\ &= \frac{2+1}{2-1} \\ &= 3\end{aligned}$$

となる。したがって、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned}b_n &= 3\cdot 3^{n-1} \\ &= 3^n\end{aligned}$$

となる。以上より、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$\begin{aligned}3^n &= \frac{a_n+1}{a_n-1} \\ \Leftrightarrow 3^n\cdot a_n-3^n &= a_n+1 \quad (\because a_n\neq 1) \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{3^n+1}{3^n-1} \quad (\because n\geq 1 \text{ より } 3^n-1\neq 0)\end{aligned}$$

となる。

II

【解答】

ソ	4	タ	48
---	---	---	----

チ	2	ツ	4	テ	88
---	---	---	---	---	----

ト	9	ナ	5	ニ	8
---	---	---	---	---	---

【解説】

[1]

すべての従業員がAの生産に従事する場合、Bは生産されないから $y=0$ である。このとき、従業員の数について考えると、題意で与えられた関係式より

$$x^2 + 2x = 24$$

$$(x+6)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 4 \quad (\because x \geq 0)$$

となる。この時の売上金額は $12x$ を計算すると、48 となる。

[2]

従業員の人数は24人であり、従業員は必ずAかBのどちらかの生産に従事するから

$$x^2 + 2x + y^2 = 24$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 25 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。ただし、 $x \geq 0, y \geq 0$ である。また、売上金額を k と置くと、

$$12x + 16y = k$$

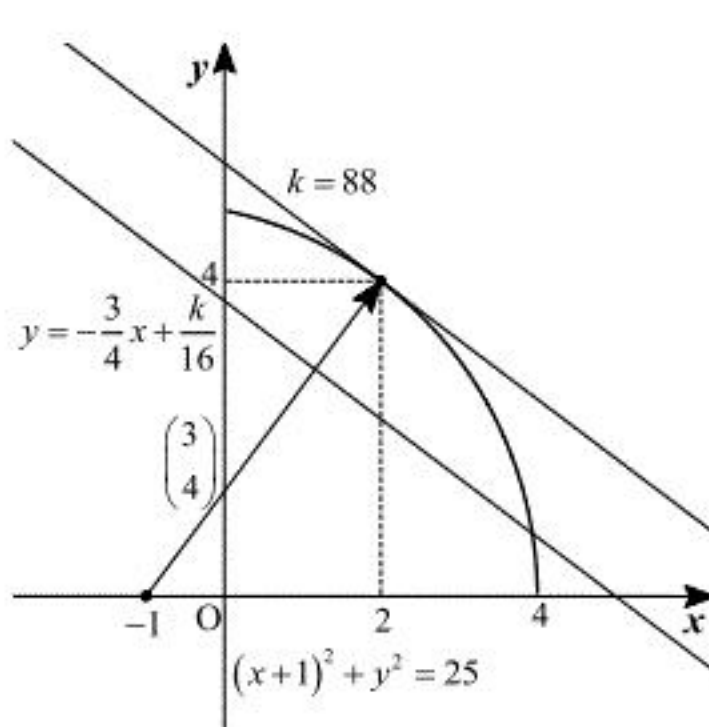
$$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{k}{16} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。ここで k のとり得る値の範囲を W とおくと、

$$k \in W \Leftrightarrow \textcircled{1} \text{かつ} \textcircled{2} \text{かつ} x \geq 0, y \geq 0 \text{ を満たす実数 } x, y \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow \text{円} \textcircled{1} \text{と直線} \textcircled{2} \text{が } x \geq 0, y \geq 0 \text{ で共有点をもつ}$$

となる。以下この共有点をもつ条件を xy 平面上で考える。



y 切片が最大となる候補は上図より、円①と直線②が接するときであるから、まずこのときの k の値とそのときの接点の座標を求める。円①の半径が5であり、直線②の法線ベクトルのうち、長さが5であるものの一つは

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

であることに注意すると、円①と直線②が接するときの接点のうち、第一象限にあるものの座標は

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (2, 4)$$

であることがわかる。この点は上図の円周の一部分上にあるから、直線②がこの点を通るときに k は最大になり、このときの k は

$$\begin{aligned} k &= 12 \cdot 2 + 16 \cdot 4 \\ &= 88 \end{aligned}$$

と求まる。

[3]

1 単位当たりのBの値段を b とする。まず、直線 $y=x$ と円①の交点のうち、第一象限にあるものの x 座標は

$$x^2 + 2x + x^2 = 24$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

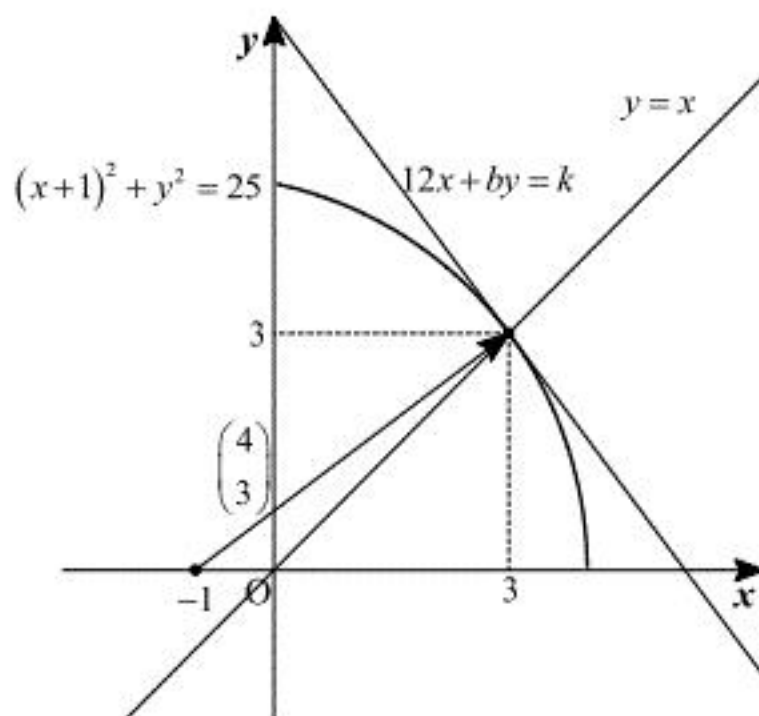
$$\Leftrightarrow (x+4)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 3$$

となる。したがって直線 $y=x$ と円①の交点のうち、第一象限にあるものの座標は

$$(3, 3)$$

となる。



ここで、円①の中心を始点とし、この点を終点としたベクトルは

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となるから、[2]と同様に考えれば、直線 $12x + by = k$ の法線ベクトルが上で求めたベクトルと平行になり、かつ点 $(3, 3)$ を通るときに k は最大になる。したがって、

$$\begin{aligned} b &= 12 \cdot \frac{3}{4} \\ &= 9 \end{aligned}$$

であり、このとき $k=63$ となる。

[4]

題意より、 $x \geq 0, y \geq 0$ かつ L が自然数であり、生産に必要な従業員の条件

$$x^2 + 2x + y^2 = L \quad \cdots \textcircled{3}$$

を満たすとき、利益

$$k = 12x + 16y - L \quad \cdots \textcircled{4}$$

を最大にする問題を考えればよい。

まず、 x, y, L の動く範囲を広げて考えて、 x, y が全実数を動き、 L が正の実数の値を動くときに、③の条件のもとで④を最大にする問題を考える。最初に L を固定して考えることにして、③を変形すると、

$$(x+1)^2 + y^2 = (\sqrt{L+1})^2$$

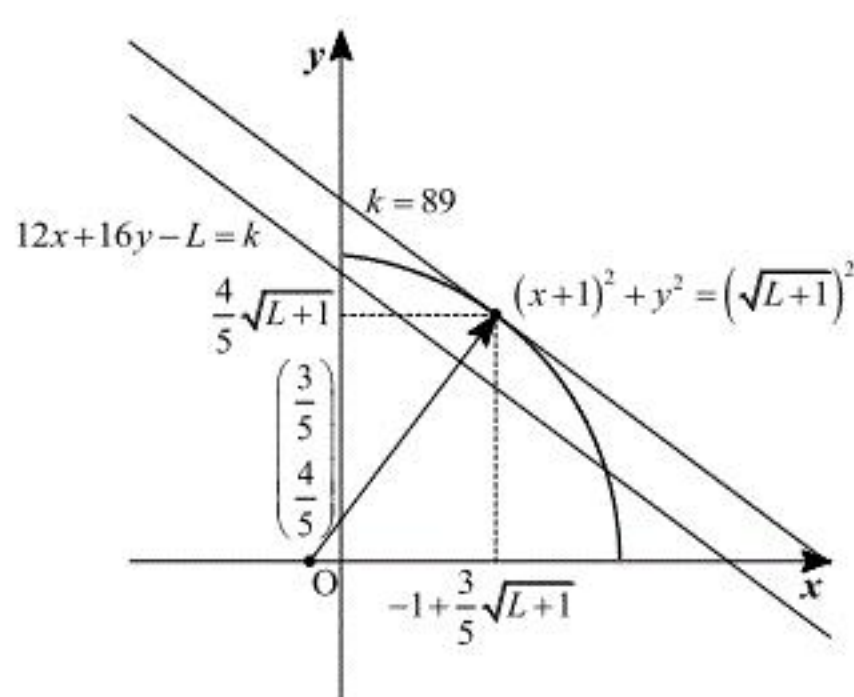
となるから、これは xy 平面上で半径 $\sqrt{L+1}$ 、中心 $(-1, 0)$ の円を表す。また、④は xy 平面上で長さ1の法線ベクトルが

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

である直線を表すから、[2]と同様に考えると、円③上の点

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{L+1} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{5}\sqrt{L+1} \\ \frac{4}{5}\sqrt{L+1} \end{pmatrix}$$

で直線④が接するときに、 k が最大になることがわかる。



ここで、この点を直線④が通るとき、

$$k = 12x + 16y - L$$

$$= 12 \left(-1 + \frac{3}{5}\sqrt{L+1} \right) + 16 \left(\frac{4}{5}\sqrt{L+1} \right) - L$$

$$= -(L+1) + 20\sqrt{L+1} - 11$$

$$= -(\sqrt{L+1} - 10)^2 + 89 \quad \cdots \textcircled{5}$$

となるから、最後に L を正の実数全体で動かせば、⑤より

$$\begin{aligned} \sqrt{L+1} &= 10 \\ \therefore L &= 99 \end{aligned}$$

のとき k は最大値 $k=89$ をとることがわかる。

さらに、このとき L は自然数であり、A、Bの生産量はそれぞれ

$$\begin{aligned} x &= -1 + \frac{3}{5}\sqrt{99+1} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{4}{5}\sqrt{99+1} \\ &= 8 \end{aligned}$$

となつて、 $x \geq 0, y \geq 0$ を満たすから、これらは元の問題の答えになっている。

Ⅲ

[1]

$y = x^2$ を x で微分すると、

$$y' = 2x$$

となる。したがって、M における接線は、

$$y - x_1^2 = 2x_1(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow y = 2x_1x - x_1^2$$

となる。また、N における接線は、

$$y - x_2^2 = 2x_2(x - x_2)$$

$$\Leftrightarrow y = 2x_2x - x_2^2$$

となる。この 2 式を連立すると、 $x_1 \neq x_2$ であるから、交点の x 座標は、

$$2x_1x - x_1^2 = 2x_2x - x_2^2$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1 - x_2)x = x_1^2 - x_2^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

となる。また、 y 座標は

$$y = 2x_1 \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} - x_1^2$$

$$= x_1x_2$$

となる。この交点が点 P $(t, t^2 - 1)$ に一致するから、

$$\begin{cases} t = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ t^2 - 1 = x_1x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2t \\ x_1x_2 = t^2 - 1 \end{cases}$$

が得られる。

(証明終)

[2]

点 M, N を通る直線の方程式は、

$$y - x_1^2 = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow y = (x_2 + x_1)(x - x_1) + x_1^2$$

$$\Leftrightarrow y = (x_2 + x_1)x - x_1x_2$$

となる。ここで、[1] で求めた式を代入すると、

$$y = 2tx - (t^2 - 1)$$

となる。

$$(答) \ y = 2tx - (t^2 - 1)$$

[3]

直線 MN の式と放物線 C_3 の式 $y = x^2 + 1$ を連立すると、

$$x^2 + 1 = 2tx - (t^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2tx + t^2 = 0$$

となる。この判別式 D を考えると、

$$D = (2t)^2 - 4t^2$$

$$= 0$$

となるから、 $y = 2tx - (t^2 - 1)$ は $y = x^2 + 1$ と接する。

(証明終)

また、上の方程式を解くと、

$$x^2 - 2tx + t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - t)^2 = 0$$

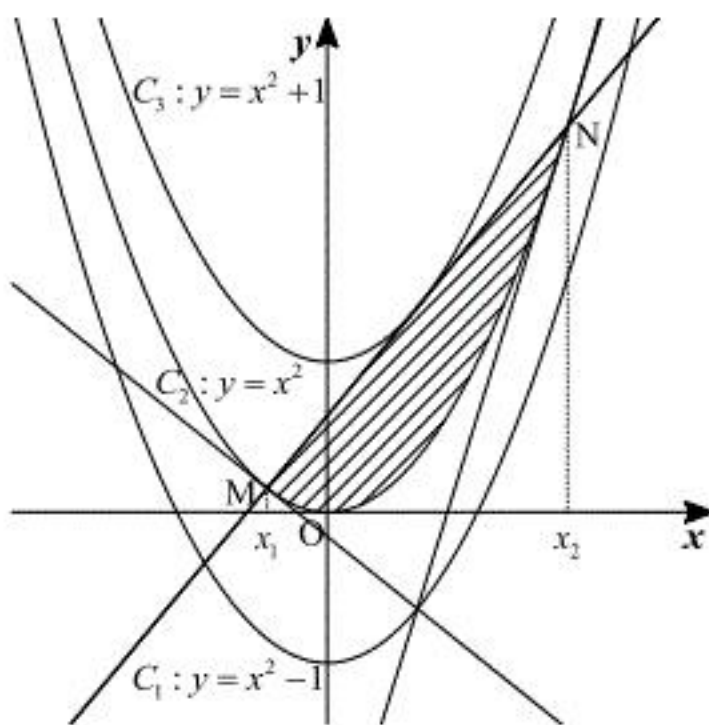
$$\therefore x = t$$

となるから、接点の座標は $(t, t^2 + 1)$ となる。

$$(答) \text{ 接点の座標: } (t, t^2 + 1)$$

[4]

x_1, x_2 に大小関係を設定しても一般性を失わないので、 $x_1 < x_2$ と定める。すると、下図の斜線部の面積を求めればよいことになる。



したがって、求める面積 S は、

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \{ (x_1 + x_2)x - x_1x_2 \} - x^2 dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} - (x - x_1)(x - x_2) dx$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)^3}{6}$$

となる。ここで、 $(x_2 - x_1)^2$ を考えると、

$$(x_2 - x_1)^2 = x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2$$

$$= (x_2 + x_1)^2 - 4x_2x_1$$

$$= (2t)^2 - 4(t^2 - 1)$$

$$= 4$$

が得られる。ここで、 $x_1 < x_2$ と定めたことから、

$$x_2 - x_1 = 2$$

となるから、求める面積は、

$$S = \frac{2^3}{6}$$

$$= \frac{4}{3}$$

となる。

$$(答) \ \frac{4}{3}$$