

〔解答〕

〔1〕

ア 27 イ $\frac{1}{64}$ ウ $\frac{1}{8}$ エ $\frac{5}{48}$

〔2〕

オ 7 カ 3 キ 4 ク 3 ケ 2
コ $\frac{3}{2}$ サ 3 シ 2 ス $\frac{3}{2}$

〔3〕

セ 15 ソ 63 タ 1 チ 15
ツ 63 テ 3 ト 7 ナ 81

〔解説〕

〔1〕

(a) 求める事象は大中小の3つとも整数、つまり、 $\sqrt{1}=1, \sqrt{4}=2, \sqrt{9}=3$ の3つのみが出る事象であるから、その場合の数は $3^3=27$ 通りであり、このようになる確率は

$$\frac{3^3}{12^3}=\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}$$

である。

(b)

大小の2個のさいころの出た目の差が整数となるのは、同じ目が出た場合か異なる整数が出た場合である。同じ目が出る場合は12通りあり、異なる整数が出る場合は ${}_3P_2=6$ 通りあるので、求める確率は、

$$\frac{12+6}{12^2}=\frac{1}{8}$$

である。

(c)

次のように場合分けをして、場合の数を調べる。

〔1〕3つとも同じ目のとき

$\sqrt{1}=1, \sqrt{4}=2, \sqrt{9}=3$ が出る場合の3通りである。

〔2〕2つが同じ目で、残りのひとつが異なる目のとき

大中小は考えずに、出た目の組を $(\sqrt{a}, \sqrt{a}, \sqrt{b})$ 、 $a \neq b$ のようにおくと、 b の取り方は

$\sqrt{1}=1, \sqrt{4}=2, \sqrt{9}=3$ の3通りであり、 a の取り方は b 以外の11通り、大中小の出方は3通りあるので、

$$3 \cdot 11 \cdot 3 = 99 \text{ (通り)}$$

となる。

〔3〕3つとも異なる目のとき

〔2〕と同様に、 $(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$ 、 $a < b < c$ とおくと、求める組は、 abc が平方数になる条件を考えて、

- (1, 2, 8), (1, 3, 12), (1, 4, 9),
- (2, 3, 6), (2, 4, 8), (2, 5, 10), (2, 6, 12), (2, 8, 9),
- (3, 4, 12), (3, 6, 8), (3, 9, 12),
- (5, 8, 10),
- (6, 8, 12)

の13通りがある。したがって、大中小の出方は $3! = 6$ 通りであるから、全体で

$$13 \cdot 6 = 78 \text{ (通り)}$$

となる。

以上、〔1〕、〔2〕、〔3〕より、求める確率は、

$$\frac{3+99+78}{12^3}=\frac{5}{48}$$

となる。

〔2〕

$$a_{n+1}=3a_n+4n+1 \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_2=3 \cdot 1+4 \cdot 1+1=8$$

であるから、 $b_1=a_2-a_1=7$ である。また、①において、 n を $n+1$ に変えた

$$a_{n+2}=3a_{n+1}+4(n+1)+1$$

から①を引くことにより、

$$b_{n+1}=3b_n+4$$

を得る。これを变形すると、

$$b_{n+1}+2=3(b_n+2)$$

となるから、 $b_1=7$ と合わせて、

$$b_n=(7+2) \cdot 3^{n-1}-2=3^{n+1}-2$$

となる。したがって、 $n \geq 2$ に対し、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3^{k+1}-2) \\ &= 1 + \frac{9(3^{n-1}-1)}{3-1} - 2(n-1) \\ &= \frac{3}{2} \times 3^n - 2n - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

と求まり、これは $n=1$ のときも成り立つ。

〔3〕

直方体の辺の長さと、表面積について式を立てることにより、

$$\begin{cases} 4(x+y+z)=60 \\ 2(xy+yz+zx)=126 \end{cases} \cdots \begin{cases} x+y+z=15 \\ xy+yz+zx=63 \end{cases}$$

と求まる。したがって、

$$\begin{aligned} V &= xyz \\ &= x\{63-x(y+z)\} \\ &= x\{63-x(15-x)\} \\ &= x^3-15x^2+63x \end{aligned}$$

と x のみの式で表すことができる。

$$\begin{aligned} V' &= 3x^2-30x+63 \\ &= 3(x-3)(x-7) \end{aligned}$$

であるから、次の増減表が書ける。

x	1	...	3	...	7	...	9
V'		+	0	-	0	+	
V	49	$\nearrow$	81 極大	$\searrow$	49 極小	$\nearrow$	81

したがって、 $x=3 \text{ cm}$ で極大、 $x=7 \text{ cm}$ で極小となり、直方体の最大値は 81 cm^3 となる。

II

〔解答〕

- 〔1〕
ニ 8.0 ヌ 4.0 ネ 3.0
- 〔2〕
ノ 260 ハ 93600
- 〔3〕
ヒ 50400 フ 13 ヘ 15

〔解説〕

- 〔1〕
売電量、自家消費量、購入量を〔注〕②に従って計算すると、次表のようになる。

時	電力消費量	発電量	売電量	自家消費量	購入量
0	0.2	0.0	0.0	0.0	0.2
1	0.2	0.0	0.0	0.0	0.2
2	0.2	0.0	0.0	0.0	0.2
3	0.2	0.0	0.0	0.0	0.2
4	0.2	0.0	0.0	0.0	0.2
5	0.2	0.0	0.0	0.0	0.2
6	0.2	0.2	0.0	0.2	0.0
7	0.2	0.4	0.2	0.2	0.0
8	0.2	0.5	0.3	0.2	0.0
9	0.2	0.7	0.5	0.2	0.0
10	0.3	1.1	0.8	0.3	0.0
11	0.3	1.5	1.2	0.3	0.0
12	0.4	1.7	1.3	0.4	0.0
13	0.4	1.7	1.3	0.4	0.0
14	0.4	1.4	1.0	0.4	0.0
15	0.4	1.2	0.8	0.4	0.0
16	0.4	1.0	0.6	0.4	0.0
17	0.4	0.4	0.0	0.4	0.0
18	0.4	0.2	0.0	0.2	0.2
19	0.4	0.0	0.0	0.0	0.4
20	0.4	0.0	0.0	0.0	0.4
21	0.3	0.0	0.0	0.0	0.3
22	0.3	0.0	0.0	0.0	0.3
23	0.2	0.0	0.0	0.0	0.2
合計	7.0	12.0	8.0	4.0	3.0

よって、A家の6月の1日あたりの売電量は8.0kWh、1日あたりの自家消費量は4.0kWhである。1日あたりの購入量は3.0kWhである。

- 〔2〕
A家の6月の1日あたりの電力収支の黒字分は
 $-20 \times 3.0 + 40 \times 8.0 = 260$
より、260円となる。よって、1年間の電力収支の黒字分は
 $260 \times 360 = 93600$
より、93600円となる。

- 〔3〕
A家の6月の1日あたりの電力消費量は7.0kWhより、装置を設置しなかったときに毎年支払う電気代は1年あたり
 $20 \times 7.0 \times 360 = 50400$
より、50400円となる。したがって、太陽光発電装置の設置によるメリットが初めて出るのがx年後だとすると
 $1800000 - 93600x \leq 50400x$
 $\Leftrightarrow 12.5 \leq x$
となるから、切り上げて13年後が求める答えとなる。次に、販売価格が11年目から20円/kWhになるとすると、11年目からの1年間の電力収支の黒字分は
 $(-20 \times 3.0 + 20 \times 8.0) \times 360 = 36000$
より、36000円となるから、太陽光発電装置の設置によるメリットが初めて出るのがx年後であるとして
 $1800000 - 93600 \times 10 - 36000 \times (x - 10) \leq 50400x$
 $\Leftrightarrow \frac{85}{6} \leq x$
となるから、 $\frac{85}{6} = 14.1\dots$ より切り上げて15年後が求める答えとなる。

Ⅲ

[1]

まず、 $\triangle \text{ARI}$ と $\triangle \text{AQI}$ が合同であることを示す。I は $\triangle \text{ABC}$ の内心であるから、

$$\angle \text{RAI} = \angle \text{QAI}$$

である。また、AI は共通で、更に

$$\angle \text{ARI} = \angle \text{AQI} = \frac{\pi}{2}$$

であるから、直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しく、 $\triangle \text{ARI}$ と $\triangle \text{AQI}$ は合同である。よって、

$$\text{AR} = \text{AQ}$$

である。同様にして、 $\triangle \text{BRI}$ と $\triangle \text{BPI}$ 、 $\triangle \text{CPI}$ と $\triangle \text{CQI}$ もそれぞれ合同であることが示せるので、

$$\text{BP} = \text{BR}, \text{CP} = \text{CQ}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} a+b+c &= 2s \\ \Leftrightarrow (\text{BP}+\text{PC})+(\text{CQ}+\text{QA})+(\text{AR}+\text{RB}) &= 2s \\ \Leftrightarrow 2(\text{BP}+\text{CQ}+\text{AR}) &= 2s \\ \Leftrightarrow \text{BP}+\text{CQ}+\text{AR} &= s \end{aligned}$$

が成立する。

(証明終)

[2]

$$\begin{aligned} \text{BP}+\text{CQ} &= \text{BP}+\text{PC} \\ &= \text{BC} \\ &= a \end{aligned}$$

であるから、(1)の結果より、

$$\begin{aligned} \text{AR} &= s - (\text{BP}+\text{CQ}) \\ &= s - a \end{aligned}$$

である。よって、

$$\tan \alpha = \frac{\text{AR}}{\text{RI}} = \frac{s-a}{r}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \tan \alpha = \frac{s-a}{r}$$

[3]

$\angle \text{AIR} = \angle \text{AIQ} = \alpha$, $\angle \text{BIR} = \angle \text{BIP} = \beta$, $\angle \text{CIP} = \angle \text{CIQ} = \gamma$ より

$$\begin{aligned} 2\alpha + 2\beta + 2\gamma &= 2\pi \\ \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma &= \pi \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma &= \tan \alpha + \tan \beta + \tan \{ \pi - (\alpha + \beta) \} \\ &= \tan \alpha + \tan \beta - \tan (\alpha + \beta) \\ &= \tan \alpha + \tan \beta - \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{-\tan \alpha \tan \beta (\tan \alpha + \tan \beta)}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= -\tan \alpha \tan \beta \tan (\alpha + \beta) \\ &= \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma \quad (\because \tan \gamma = -\tan (\alpha + \beta)) \end{aligned}$$

$$\therefore \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$$

が成り立つ。

(証明終)

[4]

[2] と同様に、

$$\tan \beta = \frac{s-b}{r}, \tan \gamma = \frac{s-c}{r}$$

となる。これらと $\tan \alpha = \frac{s-a}{r}$ を [3] で示した等式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{3s-(a+b+c)}{r} &= \frac{1}{r^3}(s-a)(s-b)(s-c) \\ \Leftrightarrow \frac{s}{r} &= \frac{1}{r^3}(s-a)(s-b)(s-c) \\ \therefore r &= \sqrt{\frac{1}{s}(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (\because r > 0) \end{aligned}$$

を得る。よって、 $\triangle \text{ABC}$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r(a+b+c) \\ &= rs \\ &= \sqrt{\frac{1}{s}(s-a)(s-b)(s-c)} \cdot s \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

と表せる。

(証明終)

[5]

$a, b+c$ が一定であるので、 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ も一定である。また、 $b+c = k$ (k は正の定数) とおく。[4] の結果より、

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

であり、 $s(s-a)$ は一定であるので、 $(s-b)(s-c)$ を最大にする b, c を求めればよい。

$$\begin{aligned} (s-b)(s-c) &= s^2 - (b+c)s + bc \\ &= s^2 - ks + b(k-b) \quad (\because b+c=k) \\ &= -b^2 + kb + s^2 - ks \\ &= -\left(b - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{k^2}{4} + s^2 - ks \quad (0 < b < k) \end{aligned}$$

より、 $(s-b)(s-c)$ が最大になるのは

$$b = \frac{k}{2} \quad \therefore b = c$$

のときである。よって、 $a, b+c$ が一定である $\triangle \text{ABC}$ のうち、面積が最大となるのは

$\triangle \text{ABC}$ が $\text{AB} = \text{CA}$ の二等辺三角形となる場合

である。

(答) $\text{AB} = \text{CA}$ の二等辺三角形