

【解答】

〔1〕	ア	−4	イ	4
	ウ	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	エ	$\frac{15-5\sqrt{5}}{2}$
	オ	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	カ	$\frac{15+5\sqrt{5}}{2}$
〔2〕	キ	4x+8		
	ク	$-\sqrt{2}$	ケ	$\sqrt{2}$
	コ	$\frac{64\sqrt{2}}{15}$		

※ク・ケは順不同

【解説】

〔1〕

$$f'(x)=4x^3+2ax+b$$

である。 $f(x)$ が $x=1$ で極値13をとることから、

$$\begin{cases} f(1)=1+a+b+12=13 \\ f'(1)=4+2a+b=0 \end{cases}$$

が成り立つ。これを解いて、

$$(a,b)=(-4,4)$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3-8x+4 \\ &= 4(x-1)(x^2+x-1) \\ &= 4(x-1)\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

であるから、増減表は以下の通りとなる。

x	…	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	…	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	…	1	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	13	↗

$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ のとき、 $x^2+x-1=0$ より $x^2=-x+1$ であるから、

$$\begin{aligned} x^4-4x^2+4x+12 &= (-x+1)^2-4x^2+4x+12 \\ &= -3x^2+2x+13 \\ &= -3(-x+1)+2x+13 \\ &= 5x+10 \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) &= 5\cdot\frac{-1-\sqrt{5}}{2}+10 \\ &= \frac{15-5\sqrt{5}}{2}, \\ f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) &= 5\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+10 \\ &= \frac{15+5\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

より、 $x=1$ 以外では、 $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ で極小値 $\frac{15-5\sqrt{5}}{2}$ 、 $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ で極大値 $\frac{15+5\sqrt{5}}{2}$ をとる。

〔2〕

接点の座標を α, β ($\alpha<\beta$)、直線 l の方程式を $y=cx+d$ とおくと、

$$(x^4-4x^2+4x+12)-(cx+d)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

が成立する。この式を整理すると、

$$(\text{左辺})=x^4-4x^2+(4-c)x+(12-d),$$

$$(\text{右辺})=x^4-2(\alpha+\beta)x^3+(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)x^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\alpha^2\beta^2$$

となるから、係数を比較して、

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=-4 \\ -2\alpha\beta(\alpha+\beta)=4-c \\ \alpha^2\beta^2=12-d \end{cases}$$

となる。第1式と第3式から、

$$c=4$$

となり、また、第1式と第2式から、

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta &= -4 \\ \therefore \alpha\beta &= -2 \end{aligned}$$

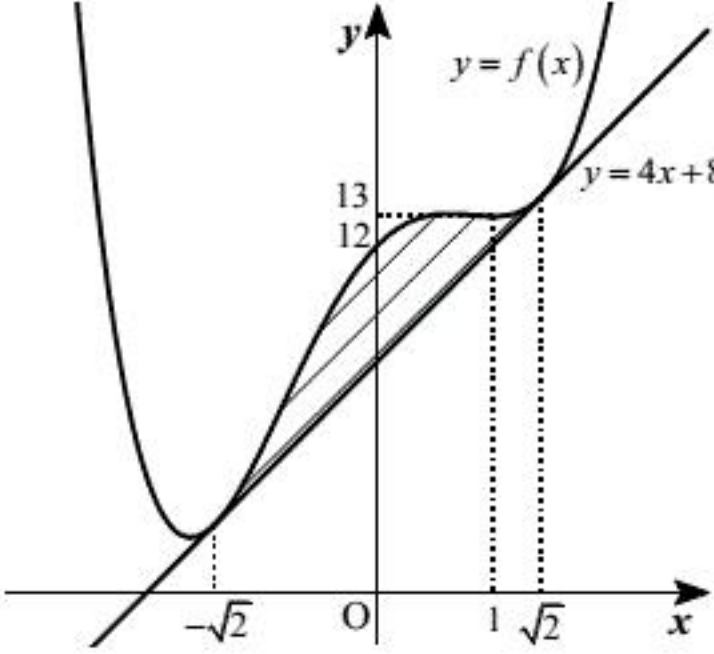
となり、これと第4式から、

$$\begin{aligned} (-2)^2 &= 12-d \\ \therefore d &= 8 \end{aligned}$$

となる。したがって、直線 l の方程式は $y=4x+8$ とわかる。一方、 $\alpha+\beta=0, \alpha\beta=-2$ より、 α, β は2次方程式

$$t^2-2=0$$

の解であるから、 $\alpha=-\sqrt{2}, \beta=\sqrt{2}$ である。よって、2つの接点の x 座標は $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ である。また、曲線 $y=f(x)$ および直線 l を図示すると以下の通りである。



求める面積は図の斜線部の面積であるから、

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \{(x^4-4x^2+4x+12)-(4x+8)\} dx &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x^4-4x^2+4) dx \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} (x^4-4x^2+4) dx \\ &= 2 \cdot \left[\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 4x \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{64\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

である。

II

【解答】

サ	t^2
シ	$1+t^2$
ス	$4+t^2$
セ	$\sqrt{2}$
ソ	$\frac{1}{3}$
タ	0
チ	$\frac{\pi^3}{24}$
ツ	$\frac{\pi^3}{48}$

【解説】

[1]

$$\begin{aligned}\{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2 &= t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t \\ &= t^2, \\ \{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2 &= (\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 \\ &= 1 + t^2, \\ \{f''(t)\}^2 + \{g''(t)\}^2 &= (-2 \sin t - t \cos t)^2 + (2 \cos t - t \sin t)^2 \\ &= 4 + t^2\end{aligned}$$

となる。また、

$$h(t) = \frac{f'(t)f''(t) + g'(t)g''(t)}{\sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} \sqrt{\{f''(t)\}^2 + \{g''(t)\}^2}}$$

とおくと、

$$\left\{ (f'(t))^2 + (g'(t))^2 \right\}' = 2f'(t)f''(t) + 2g'(t)g''(t)$$

より、

$$\begin{aligned}f'(t)f''(t) + g'(t)g''(t) &= \frac{1}{2}(1+t^2)' \\ &= t\end{aligned}$$

であることに注意して

$$h(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2} \sqrt{4+t^2}}$$

となる。微分すると

$$\begin{aligned}h'(t) &= \frac{\sqrt{(1+t^2)(4+t^2)} - t \frac{2t^3+5t}{\sqrt{(1+t^2)(4+t^2)}}}{(1+t^2)(4+t^2)} \\ &= \frac{4-t^4}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}(4+t^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(2+t^2)(\sqrt{2}+t)(\sqrt{2}-t)}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}(4+t^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

となるから、 $h(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	$(-\infty)$	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	(∞)
$h'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(t)$	(0)	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	(0)

よって、 $h(t)$ は $t=\sqrt{2}$ のとき、最大値

$$\begin{aligned}h(\sqrt{2}) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2} \sqrt{4+2}} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

をとる。

[2]

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g'(t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)g(t)dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(t)g'(t) + f'(t)g(t)\}dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(t)g(t)\}' dt \\ &= [f(t)g(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= [t^2 \cos t \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}f(t)g'(t) - f'(t)g(t) &= t \cos t (\sin t + t \cos t) - (\cos t - t \sin t) t \sin t \\ &= t^2\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g'(t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)g(t)dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^3}{24}\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g'(t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)g(t)dt = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g'(t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)g(t)dt = \frac{\pi^3}{24}$$

である。これら2つの式を辺々加えると

$$\begin{aligned}2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g'(t)dt &= \frac{\pi^3}{24} \\ \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g'(t)dt &= \frac{\pi^3}{48}\end{aligned}$$

となる。

III

【解答】

[1]	テ $-E$	ト $-E$	ナ 0
	ニ $\sqrt{3}$	ヌ 1	ネ 0
[2]	ノ $1+r-2r^2$	ハ $\sqrt{3}r+2\sqrt{3}r^2$	ヒ $(-8r^3)^{n-1}$
	フ $\frac{1}{2}$	ヘ $\frac{1-r}{1-2r+4r^2}$	ホ $\frac{\sqrt{3}r}{1-2r+4r^2}$

【解説】

[1]

$$P = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

より、 P は原点回りの $\frac{\pi}{3}$ 回転を表す行列であるから、

$$\begin{aligned} P^3 &= \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -E \end{aligned}$$

であり、

$$P + P^2 + P^3 + P^4 + P^5 = P + P^2 - E + P(-E) + P^2(-E)$$

$$= -E$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (E + P) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + P^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (E + P + P^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + P^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (E + P + P^2 + P^3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (P + P^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} P + P^2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \frac{2}{3}\pi & -\sin \frac{2}{3}\pi \\ \sin \frac{2}{3}\pi & \cos \frac{2}{3}\pi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。同様に、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_7 \\ y_7 \end{pmatrix} &= (E + P + P^2 + P^3 + P^4 + P^5 + P^6) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \{E + P + P(-E)\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\because P + P^2 + P^3 + P^4 + P^5 = -E) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

[2]

[1] で定義された行列 P を用いると

$$Q = 2rP$$

と表せる。よって

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} &= (E + Q + Q^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (E + 2rP + 4r^2P^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \left\{ E + r \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} + 2r^2 \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+r-2r^2 \\ \sqrt{3}r+2\sqrt{3}r^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり、また、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n - u_{n-1} \\ v_n - v_{n-1} \end{pmatrix} &= (Q^{3n-3} + Q^{3n-2} + Q^{3n-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= Q^{3n-3} (E + Q + Q^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= Q^{3n-3} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \\ &= (Q^3)^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \\ &= (8r^3P^3)^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \\ &= (-8r^3E)^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \\ &= (-8r^3)^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + \sum_{k=2}^n (u_k - u_{k-1}) \\ &= u_1 + \sum_{k=2}^n (-8r^3)^{k-1} u_1 \\ &= \left\{ 1 - 8r^3 + 64r^6 - \cdots + (-8r^3)^{n-1} \right\} u_1 \\ &= \frac{1 - (-8r^3)^n}{1 - (-8r^3)} u_1 \end{aligned}$$

であり、同様に

$$v_n = \frac{1 - (-8r^3)^n}{1 - (-8r^3)} v_1$$

であるから、数列 $\{u_n\}$ 、 $\{v_n\}$ がともに収束するのは、 $0 < r$ に注意して

$$\begin{aligned} |-8r^3| &< 1 \\ \therefore 0 &< r < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

のときである。このとき、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (-8r^3)^n}{1 - (-8r^3)} u_1 \\ &= \frac{1 + r - 2r^2}{1 + 8r^3} \\ &= \frac{(1 + 2r)(1 - r)}{(1 + 2r)(1 - 2r + 4r^2)} \\ &= \frac{1 - r}{1 - 2r + 4r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} v_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (-8r^3)^n}{1 - (-8r^3)} v_1 \\ &= \frac{\sqrt{3}r + 2\sqrt{3}r^2}{1 + 8r^3} \\ &= \frac{\sqrt{3}r(1 + 2r)}{(1 + 2r)(1 - 2r + 4r^2)} \\ &= \frac{\sqrt{3}r}{1 - 2r + 4r^2} \end{aligned}$$

となる。

IV

〔解答〕

マ 729

ミ 186

ム 15

メ 540

モ 10

ヤ 701

〔解説〕

直線 g 上の 6 点を左から, 1, 2, 3, 4, 5, 6 とし, 直線 h 上の 3 点を左から A, B, C とする。

〔1〕

直線 g 上の各点に対して, 直線 h 上の, A, B, C のどれとつなぐかで 3 通りあるので,

$$3^6 = 729 \text{ (通り)}$$

である。

〔2〕

直線 h 上のどの 2 点とつなぐかで ${}_3C_2$ 通りある。例えば, A, B とつなぐとすれば, 直線 g 上の各点に対して, A, B のどちらとつなぐかで, 2 通りの選び方があるから, 6 点では, 2^6 通りあるが, そのうち, すべて A , すべて B という結び方があるので, 2 点のみと結ぶ場合の数は $2^6 - 2$ 通りである。したがって, 全体では,

$${}_3C_2 \cdot (2^6 - 2) = 186 \text{ (通り)}$$

である。

〔3〕

〔2〕と同様に, 直線 h 上の 2 点の選び方が, ${}_3C_2$ 通りある。また, 途中で交差しないような結び方と, 点 1 から 6 までを, 左右 2 つに分ける方法が 1 対 1 に対応し, その仕方は, 5 通りあるので, 全体としては,

$${}_3C_2 \cdot 5 = 15 \text{ (通り)}$$

となる。

〔4〕

直線 h 上の 1 点のみと結ぶ方法は, 3 通りであるから, 〔1〕, 〔2〕の結果より, 3 点と結ぶ方法は,

$$729 - 186 - 3 = 540 \text{ (通り)}$$

である。

〔5〕

〔3〕と同じように考えると, 途中で交差しないような結び方は, 点 1 から 6 までを, 3 分割して, 左から順に, A, B, C と結ぶことによって得られるので, 求める場合の数は, 点 1 から 6 までの間 5 か所のうち 2 つに仕切りを入れる場合の数と同じであり,

$${}_5C_2 = 10 \text{ (通り)}$$

となる。

〔6〕

これまでの議論から, 途中で交差しないようなつなぎ方は, 直線 h 上の 1 点とつなぐ場合の 3 通り, 2 点のみとつなぐ場合の 15 通り, 3 点とつなぐ場合の 10 通りの計 $3 + 15 + 10 = 28$ 通りあるので, 交差するようなつなぎ方は,

$$729 - 28 = 701 \text{ (通り)}$$

である。