

【解答】

〔1〕

$$\text{ア} \quad -1 \quad \text{イ} \quad -2\sqrt{2} \quad \text{ウ} \quad 3$$

〔2〕

$$\text{エ} \quad \log_a \sqrt{3} \quad \text{オ} \quad 1$$

〔3〕

$$\text{カ} \quad 3\sin\theta-2\sin^3\theta \quad \text{キ} \quad \frac{\pi}{4} \quad \text{ク} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

〔4〕

$$\text{ケ} \quad \frac{1}{2} \quad \text{コ} \quad 3\vec{a}+5\vec{b}$$

【解説】

〔1〕

$$x^3+(a-1)x^2+x+3-a=0 \qquad \cdots \textcircled{1}$$

(a)

①の左辺に $x=-1$ を代入すると、 a の値によらず

$$(-1)^3+(a-1)(-1)^2+(-1)+3-a=0$$

より、①は任意の a に対し $x=-1$ を解にもつ。

(b)

(a)の結果より、①の左辺は $x+1$ を因数にもち、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow (x+1)\{x^2+(a-2)x+(3-a)\}=0$$

となる。①の3つの解のうち2つが等しくなるのは、 $x^2+(a-2)x+(3-a)=0$ が重解をもつか、または $x=-1$ が $x^2+(a-2)x+(3-a)=0$ を満たすときである。

「 $x^2+(a-2)x+(3-a)=0$ が重解を持つ」

$$\Leftrightarrow (a-2)^2-4(3-a)=0$$

$$\Leftrightarrow a^2=8$$

$$\Leftrightarrow a=\pm 2\sqrt{2}$$

であり、また

$$(-1)^2+(a-2)(-1)+(3-a)=0$$

$$\Leftrightarrow a=3$$

であるから、 a の値のなかで最も小さい値は $-2\sqrt{2}$ で、最も大きい値は3である。

〔2〕

問題文の条件より、

$$3\log_a 3=2.88, \quad 3\log_a 2=1.81, \quad 3\log_a 5=4.12$$

である。よって

$$\log_a \sqrt{3}=\frac{1}{2}\log_a 3=\frac{2.88}{6}<\frac{1}{2},$$

$$\log_a \frac{9}{2}=2\log_a 3-\log_a 2$$

$$=\frac{2\cdot 2.88}{3}-\frac{1.81}{3}$$

$$=\frac{3.95}{3}$$

$$>1,$$

$$\log_{10} a=\frac{1}{\log_a 10}$$

$$=\frac{1}{\log_a 2+\log_a 5}$$

$$=\frac{1}{\frac{4.12}{3}+\frac{1.81}{3}}$$

$$=\frac{3}{5.93}>\frac{1}{2}$$

となる。また $\frac{3}{5.93}<1$ でもあるから、以上より

$$\log_a \sqrt{3}<\log_{10} a<1<\log_a \frac{9}{2}$$

である。よって $x=\log_a \sqrt{3}$, $z=1$ となる。

〔3〕

$\triangle \text{OPQ}$ の面積 S は、

$$S=\frac{1}{2}\left|2\cos\theta\sin 2\theta-\cos 2\theta\sin\theta\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|4\sin\theta\cos^2\theta-\sin\theta+2\sin^3\theta\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|3\sin\theta-2\sin^3\theta\right|$$

と表せる。ここで $X=\sin\theta$ とおくと、 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $0<X<1$ であるから、

$$3\sin\theta-2\sin^3\theta=X\left(3-2X^2\right)>0$$

となる。よって、

$$S=\frac{1}{2}\left(3\sin\theta-2\sin^3\theta\right)\left(=\frac{3}{2}X-X^3\right)$$

となる。これを $f(X)$ とおくと、

$$f'(X)=\frac{3}{2}-3X^2$$

より次の増減表を得る。

X	(0)	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	(1)
$f'(X)$		+	0	−	
$f(X)$		$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	

したがって、 S は $X=\sin\theta=1\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ をとる。

〔4〕

(a)

$$\left|\overline{\text{AB}}\right|^2=\left|-\overline{\text{OA}}+\overline{\text{OB}}\right|^2$$

$$=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

であるから、

$$4=3+2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$$

である。

(b)

点 P は直線 AM 上にあるので、実数定数 k を用いて

$$\overline{\text{OP}}=\overline{\text{OA}}+\overline{\text{AP}}$$

$$=\vec{a}+k\overline{\text{AM}}$$

$$=\vec{a}+k\left(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$$=(1-k)\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{b}$$

とかける。これと $\overline{\text{AB}}=\vec{a}-\vec{b}$ が垂直なので、

$$\left\{(1-k)\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{b}\right\}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$$

$$\Leftrightarrow (1-k)\left|\vec{a}\right|^2+\left(\frac{3}{2}k-1\right)\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{k}{2}\left|\vec{b}\right|^2=0$$

$$\Leftrightarrow 3(1-k)+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}k-1\right)-\frac{k}{2}\cdot 2=0$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{10}{13}$$

となる。したがって、

$$\overline{\text{OP}}=\frac{1}{13}\left(3\vec{a}+5\vec{b}\right)$$

である。

II

〔解答〕

〔1〕

$$\text{サ} \quad -1 \quad \text{シ} \quad 2 \quad \text{ス} \quad \frac{4}{3} \quad \text{セ} \quad \frac{2}{3}$$

〔2〕

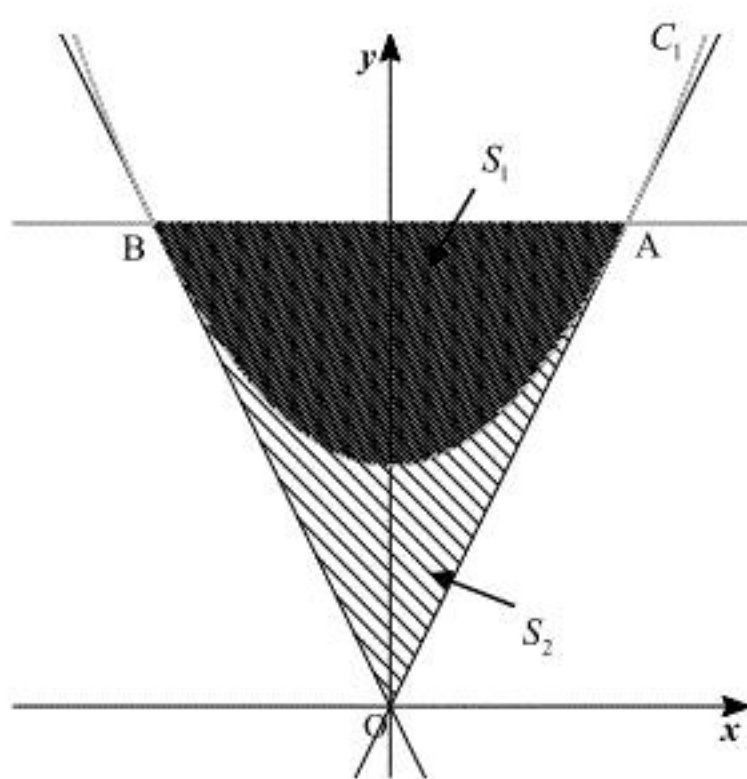
$$\begin{array}{lll} \text{ソ} & \sqrt{b} & \text{タ} \quad a\sqrt{b}+2b \\ \text{チ} & -\sqrt{b} & \text{ツ} \quad -a\sqrt{b}+2b \\ \text{テ} & \frac{4b\sqrt{b}}{3} & \text{ト} \quad \frac{2b\sqrt{b}}{3} \end{array}$$

〔3〕

$$\text{ナ} \quad a \quad = \quad \frac{4}{3}$$

〔解説〕

〔1〕



接点の x 座標を t とおくと, $y = x^2 + 1 \Rightarrow y' = 2x$ より, 接線の式は,

$$\begin{aligned} y &= 2t(x-t) + t^2 + 1 \\ &= 2tx - t^2 + 1 \end{aligned}$$

となる。これが原点を通るので,

$$\begin{aligned} 0 &= -t^2 + 1 \\ \therefore t &= \pm 1 \end{aligned}$$

となる。したがって A の座標は $(1, 2)$, B の座標は, $(-1, 2)$ となる。

また

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^1 \{2 - (x^2 + 1)\} dx \\ &= -\int_{-1}^1 (x+1)(x-1) dx \\ &= -\frac{1}{6} \cdot \{1 - (-1)\}^3 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned} S_2 &= \triangle OAB - S_1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - \frac{4}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。

〔2〕

接点の x 座標を t とおくと, $y = x^2 + ax + b \Rightarrow y' = 2x + a$ より, 接線の式は,

$$\begin{aligned} y &= (2t+a)(x-t) + t^2 + at + b \\ &= (2t+a)x - t^2 + b \end{aligned}$$

となる。これが原点を通るので,

$$\begin{aligned} 0 &= -t^2 + b \\ \therefore t &= \pm\sqrt{b} \quad (\because b > 0) \end{aligned}$$

となる。よって P $(\sqrt{b}, a\sqrt{b} + 2b)$, Q $(-\sqrt{b}, -a\sqrt{b} + 2b)$ である。また, 直線 PQ の方程式を

$y = f(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} S_3 &= \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} \{f(x) - (x^2 + ax + b)\} dx \\ &= -\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} (x - \sqrt{b})(x + \sqrt{b}) dx \\ &= -\frac{1}{6} \cdot \{\sqrt{b} - (-\sqrt{b})\}^3 \\ &= \frac{4b\sqrt{b}}{3} \end{aligned}$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} S_4 &= \triangle OPQ - S_3 \\ &= \frac{1}{2} |\sqrt{b}(-a\sqrt{b} + 2b) - (-\sqrt{b})(a\sqrt{b} + 2b)| - \frac{4b\sqrt{b}}{3} \\ &= 2b\sqrt{b} - \frac{4b\sqrt{b}}{3} \\ &= \frac{2b\sqrt{b}}{3} \end{aligned}$$

である。

〔3〕

点 $(0, b+1)$ を通る傾き m の直線の式は

$$y = mx + b + 1$$

だから, これと C_2 との交点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 + (a-m)x - 1 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{m-a \pm \sqrt{(m-a)^2 + 4}}{2} \end{aligned}$$

である。したがって, この 2 解を α , β ($\alpha < \beta$) とおけば,

$$\begin{aligned} S_5 &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(mx+b+1) - (x^2 + ax + b)\} dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\beta)(x-\alpha) dx \\ &= \frac{(\beta-\alpha)^3}{6} \\ &= \frac{\{(m-a)^2 + 4\}^{\frac{3}{2}}}{6} \end{aligned}$$

となる。よって S_5 が最小となるのは $m = a$ のときで, 最小値は $\frac{4^{\frac{3}{2}}}{6} = \frac{4}{3}$ である。

III

【解答】

〔1〕

ヌ 7 ネ 17 ノ 41

〔2〕

ハ 2 ヒ 1

〔3〕

フ 577

〔4〕

ヘ $1 \pm \sqrt{2}$ ホ $1 \mp \sqrt{2}$

〔5〕

マ $\frac{1}{2} \left\{ (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right\}$

【解説】

〔1〕

n 階建ての最上階の部屋に配る新聞がどちらも B 紙であるような配り方の数を b_n 、最上階のどちらかの部屋には A 紙を配るような配り方の数を c_n とする。このとき

$$a_n = b_n + c_n$$

となる。 $n+1$ 階建ての場合での新聞の配りかたの総数を考えることにすると、2 階から n 階までの新聞の配りかたは n 階建てのときと同じである。

[1] n 階の部屋に配る新聞がどちらも B 紙であるとき、

$n+1$ 階の部屋には

BB, AB, BA

の 3 通りの配り方ができ、

[2] n 階の部屋に配る新聞のどちらかが A 紙であるとき、

$n+1$ 階の部屋には

BB, AB(または BA)

の 2 通りの配り方ができる。

よって

$$a_{n+1} = 3b_n + 2c_n = 2a_n + b_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。①式と、 $b_2 = 1$ 、 $c_2 = 2$ から、 $a_3 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 7$ がいえる。

次に、 $n+1$ 階のどちらの部屋にも B 紙を配る配り方を考えると、この配り方の総数は a_n と同じである。したがって

$$b_{n+1} = a_n \quad \cdots \textcircled{2}$$

がいえる。以上①、②より

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \quad \cdots \textcircled{3}$$

である。したがって

$$a_4 = 2a_3 + a_2 = 17$$

$$a_5 = 2a_4 + a_3 = 41$$

である。

〔2〕

③より $a_6 = 2a_5 + a_4$ である。

〔3〕

$$a_6 = 2a_5 + a_4 = 99$$

$$a_7 = 2a_6 + a_5 = 239$$

$$a_8 = 2a_7 + a_6 = 577$$

より $a_8 = 577$ である。

〔4〕

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta (a_{n+1} - \alpha a_n)$$

$$\Leftrightarrow a_{n+2} = (\alpha + \beta) a_{n+1} - \alpha \beta a_n$$

より③と比較すると

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha \beta = -1 \end{cases}$$

であるから、解と係数の関係より、 α, β は t の 2 次方程式

$$t^2 - 2t - 1 = 0$$

の 2 解であるから、

$$\begin{cases} \alpha = 1 + \sqrt{2} \\ \beta = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \quad (\text{複号同順})$$

である。

〔5〕

〔4〕より $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ 、 $\beta = 1 - \sqrt{2}$ とすれば、

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta (a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha (a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases}$$

から、

$$\begin{cases} a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-2} (a_3 - \alpha a_2) = (4 - 3\sqrt{2}) \beta^{n-2} \\ a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n-2} (a_3 - \beta a_2) = (4 + 3\sqrt{2}) \alpha^{n-2} \end{cases}$$

$$\therefore (\beta - \alpha) a_n = (4 - 3\sqrt{2}) \beta^{n-2} - (4 + 3\sqrt{2}) \alpha^{n-2}$$

より、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} (1 + \sqrt{2})^{n-2} + \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} (1 - \sqrt{2})^{n-2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right\} \end{aligned}$$

となる。

IV

〔解答〕

〔1〕

$$\text{ミ} \quad \frac{1}{8} \quad \text{ム} \quad \frac{9}{256} \quad \text{メ} \quad \frac{263}{2048}$$

〔2〕

$$\text{モ} \quad 4 \quad \text{マ} \quad \frac{3}{2048} \quad \text{ム} \quad \frac{255}{512}$$

〔3〕

$$\text{ヨ} \quad \frac{2\sqrt{2}+3}{8}$$

〔解説〕

〔1〕

A, B, Cがすべてx軸上にあるのは, Cがx軸上にあるときである。これは, yについて4回とも表か4回とも裏が出るときであるから, 確率は

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$$

である。次に, 2点が同じになる確率を求める。また, A=Bとなる確率は α , β について4回とも裏が出る確率で,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16^2}$$

である。A=Cとなる確率は, 4回ともyは裏が出て, かつ α について1回表, 3回裏が出る確率で,

$$4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16^2}$$

である。B=Cとなる確率は, 4回ともyは表が出て, かつ β について1回表, 3回裏が出る確率で,

$$4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16^2}$$

である。また, 3点が同じ点になることはないので, 2点が同じになる確率は

$$\frac{1+4+4}{16^2} = \frac{9}{256}$$

である。

最後に, 3点A, B, Cが二等辺三角形の頂点となるのは,

C(0, 1)でありA, Bがともに原点ではなく, 原点からの距離が等しいとき . . . ①

A(1, 0), B(0, 0)でありCはx軸上にないとき . . . ②

A(0, 0), B(-1, 0)でありCはx軸上にないとき . . . ③

の場合である。①の確率は,

$$\begin{aligned} & {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left\{ \left\{ {}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right\}^2 + \left\{ {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right\}^2 + \left\{ {}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right\}^2 + \left\{ {}_4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right\}^2 \right\} \\ &= \frac{6}{2^{12}} \cdot 69 \\ &= \frac{207}{2048} \end{aligned}$$

である。②, ③の確率はともに

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot {}_4C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{28}{2048}$$

である。以上より, 3点A, B, Cが二等辺三角形の頂点となる確率は,

$$\frac{207}{2048} + \frac{28}{2048} \cdot 2 = \frac{263}{2048}$$

である。

〔2〕

△ABCの面積が最大となるのはA(4, 0), B(-4, 0), C(0, 1)のときであるから,

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 = 4$$

であり, 確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{2048}$$

である。

△ABCの面積が無理数となるのは, yの表の出る回数が1または3でありかつ, A≠Bであるときであるから, 確率は

$$\left\{ {}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right\} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right\} = \frac{255}{512}$$

である。

〔3〕

△OACの面積をTとおく。またAのx座標をa, Cのy座標をcとしたとき, a, cのとりうる値とその確率は次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} P(c=0) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ P\left(c=\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ P(c=1) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^4 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} P(a=0) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ P(a=1) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ P(a=2) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ P(a=3) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ P(a=4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \end{array} \right.$$

よってTのとりうる値とその確率は次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} P(T=0) = P(c=0 \text{ or } a=0) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^8 = 46\left(\frac{1}{2}\right)^8 \\ P\left(T=\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = P\left(c=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ and } a=1\right) = 32\left(\frac{1}{2}\right)^8 \\ P\left(T=\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = P\left(c=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ and } a=2\right) = 48\left(\frac{1}{2}\right)^8 \\ P\left(T=\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = P\left(c=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ and } a=3\right) = 32\left(\frac{1}{2}\right)^8 \\ P\left(T=\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = P\left(c=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ and } a=4\right) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^8 \\ P\left(T=\frac{1}{2}\right) = P(c=1 \text{ and } a=1) = 24\left(\frac{1}{2}\right)^8 \\ P(T=1) = P(c=1 \text{ and } a=2) = 36\left(\frac{1}{2}\right)^8 \\ P\left(T=\frac{3}{2}\right) = P(c=1 \text{ and } a=3) = 24\left(\frac{1}{2}\right)^8 \\ P(T=2) = P(c=1 \text{ and } a=4) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^8 \end{array} \right.$$

以上よりTの期待値Eは,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^8 (16+48+48+16) + \left(\frac{1}{2}\right)^8 (12+36+36+12) = \frac{2\sqrt{2}+3}{8}$$

となる。