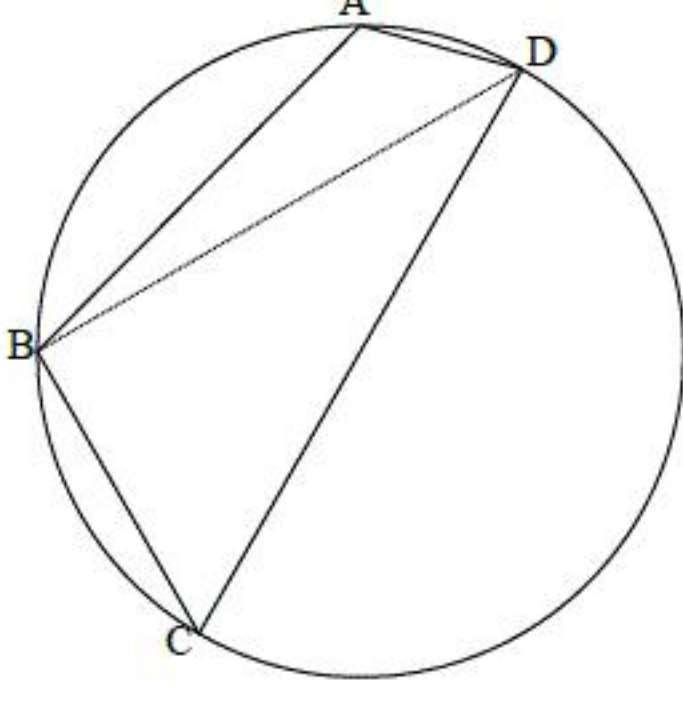


【解答】

- [1] ア 60 イ 45 ウ 2 エ $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ オ $3+\sqrt{3}$
[2] カ 6 キ 11 ク 2 ケ 3 コ 5 サ 2
[3] シ $\frac{2}{3}$ ス $\frac{1}{12}$ セ $\frac{4}{9}$ ソ $\frac{275}{3888}$

【解説】

[1]



四角形 ABCD は円に内接しているので、

$$\begin{aligned}\angle BCD &= 180^\circ - 120^\circ \\ &= 60^\circ\end{aligned}$$

である。また、 $\triangle ABD$ で正弦定理により、

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{2}}{\sin \angle ADB} &= 2 \cdot 2 \\ \Leftrightarrow \sin \angle ADB &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \therefore \angle ADB &= 45^\circ \quad (\because 0^\circ < \angle ADB < 60^\circ)\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\angle BDC &= 75^\circ - 45^\circ \\ &= 30^\circ\end{aligned}$$

であるから、 $\triangle BCD$ で正弦定理により

$$\begin{aligned}\frac{BC}{\sin 30^\circ} &= 2 \cdot 2 \\ \therefore BC &= 2\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}\angle ABD &= 180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) \\ &= 15^\circ\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin (45^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

であるから、 $\triangle ABD$ で正弦定理により

$$\begin{aligned}\frac{AD}{\sin 15^\circ} &= 2 \cdot 2 \\ \therefore AD &= \sqrt{6}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

を得る。次に、 $\triangle ABD$ の面積を S_1 とおくと

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2}) \sin 120^\circ \\ &= 3-\sqrt{3}\end{aligned}$$

である。また、 $\triangle BCD$ において、

$$\begin{aligned}\angle BDC &= 75^\circ - 45^\circ \\ &= 30^\circ \\ \angle BCD &= 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) \\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

であるから、 $\triangle BCD$ の面積を S_2 とおくと

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \tan 60^\circ \\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。したがって、四角形 ABCD の面積は

$$S_1 + S_2 = 3 + \sqrt{3}$$

である。

[2]

$t = 3^x + 3^{-x}$ とおくと

$$\begin{aligned}t^2 &= 9^x + 2 + 9^{-x} \\ \therefore 9^x + 9^{-x} &= t^2 - 2\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}y &= 9^x + 9^{-x} - 6(3^x + 3^{-x}) + 13 \\ &= (t^2 - 2) - 6t + 13 \\ &= t^2 - 6t + 11\end{aligned}$$

となる。また、 $3^x > 0$ であるから、相加相乗平均の関係により

$$t = 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{-x}} = 2$$

が成り立つ。等号成立は

$$3^x = 3^{-x} \quad \therefore x = 0$$

のときである。よって、 t の値の範囲は $t \geq 2$ である。

$$y = (t-3)^2 + 2 \quad (t \geq 2)$$

より、 y は $t=3$ 、つまり

$$\begin{aligned}3^x + 3^{-x} &= 3 \\ \Leftrightarrow (3^x)^2 - 3 \cdot 3^x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3^x &= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} (> 0) \\ \Leftrightarrow x &= \log_3 \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

のとき、最小値 2 をとる。

[3]

(a)

求める確率は、1 回の試行で、3 以上の目が出る確率であるから

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

である。

(b)

2 回の試行で出る目の組合せが (4, 6), (5, 5) のいずれかであればよいから、求める確率は

$$\frac{2!+1}{6^2} = \frac{1}{12}$$

である。

(c)

3 回の試行で、3 以上の目が 2 回出て、2 以下の目が 1 回だけ出ればよいから、求める確率は

$${}_3C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

である。

(d)

正 n 角形は $n \geq 4$ のとき対角線をもち、その本数は

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

であるから、正 4 角形の対角線の本数は 2 本、正 5 角形の対角線の本数は 5 本、正 6 角形の対角線の本数は 9 本である。よって描いた正多角形の対角線の本数の合計が 16 となるのは、文字 m で「1 または 2 または 3」を表すことにすると、5 回の試行で出る目の組合せが

$$(6, 5, 4, m, m)$$

$$(5, 5, 4, 4, 4)$$

となるときである。よって求める確率は

$$\frac{1}{6^5} (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3^2 + {}_5C_2) = \frac{275}{3888}$$

である。

II

〔解答〕

$$[1] \quad \text{タ} \ a+1 \qquad \text{チ} \ 20a-10 \qquad \text{ツ} \ 100a-b$$

$$[2] \quad \text{テ} \ \frac{1}{8}$$

$$[3] \quad \text{ト} \ \frac{25}{2}$$

〔解説〕

[1]

時刻 t における失業者数の増加分は、新しく失業者になった人数から、失業者でなくなった人数を引けばよいから、

$$\begin{aligned} h(t) &= f(t) - g(t) \\ &= (a+1)t^2 + (20a-10)t + (100a-b) \end{aligned}$$

となる。

[2]

このとき、

$$h(t) = (a+1)t^2 + 10(2a-1)t + 100a$$

である。 $a > 0$ であるから、 $0 \leq t \leq 10$ において、 $y = h(t)$ のグラフが、 t 軸に接するような a の値を求めればよい。方程式 $h(t) = 0$ の判別式を D とすれば、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 5^2(2a-1)^2 - (a+1) \cdot 100a \\ &= -200a + 25 \end{aligned}$$

であるから、 $D = 0$ となるとき、 $a = \frac{1}{8}$ である。このとき、

$$h(t) = \frac{9}{8}t^2 - \frac{15}{2}t + \frac{25}{2} = \frac{9}{8}\left(t - \frac{10}{3}\right)^2$$

となり、 $h(t) = 0$ の解 $t = \frac{10}{3}$ は $0 \leq t \leq 10$ をみたすので、 $a = \frac{1}{8}$ が求める値である。

[3]

$$h(t) = \frac{9}{8}\left(t - \frac{10}{3}\right)^2 - b$$

について、

$$\int_0^{10} h(t) dt = 0$$

となるような b を求めればよい。ここで、

$$\begin{aligned} \int_0^{10} h(t) dt &= \left[\frac{3}{8}\left(t - \frac{10}{3}\right)^3 - bt \right]_0^{10} \\ &= \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{20}{3}\right)^3 - 10b - \frac{3}{8}\left(-\frac{10}{3}\right)^3 \\ &= \frac{27}{8}\left(\frac{10}{3}\right)^3 - 10b \end{aligned}$$

となるので、条件を満たす b は

$$b = \frac{1}{10} \cdot \frac{27}{8} \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^3 = \frac{25}{2}$$

となる。

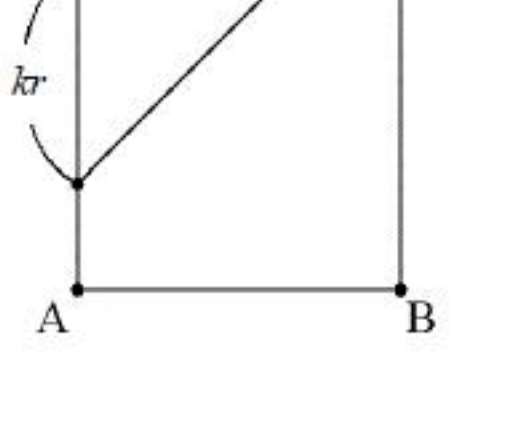
III

[1]

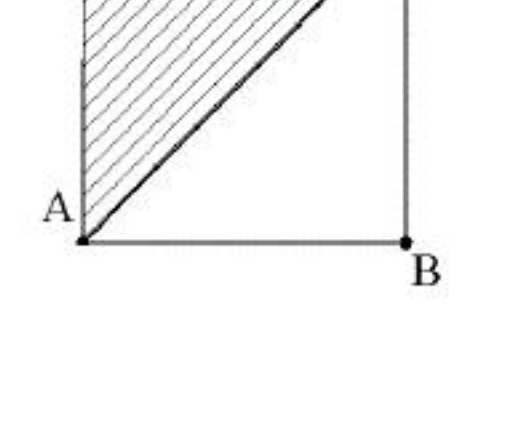
$s+t=k$ とおくと、 $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1, s+t \leq 1$ より $0 \leq k \leq 1$ である。 $k=0$ のとき $s=t=0$ となつてPはOと一致する。以下では、 $0 < k \leq 1$ とし、 k を固定して考える。すると、 $t=k-s$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= s\vec{a} + t\vec{c} \\ &= s\vec{a} + (k-s)\vec{c} \\ &= k\left\{\frac{s}{k}\vec{a} + \left(1-\frac{s}{k}\right)\vec{c}\right\}\end{aligned}$$

となり、 $0 \leq s \leq 1, 0 \leq k-s \leq 1$ だから s は $0 \leq s \leq k$ の範囲を動く。よつて、 $\overrightarrow{OP} = k\left\{\frac{s}{k}\vec{a} + \left(1-\frac{s}{k}\right)\vec{c}\right\}$ は次図の線分上を動く。



したがつて、 k が $0 \leq k \leq 1$ の範囲を動くとき、点Pの存在する範囲は次図斜線部である。ただし、境界を含む。



したがつて、面積は正方形の面積の半分だから $\frac{r^2}{2}$ となる。
(答) 点Pの存在する範囲 前図斜線部(境界を含む)

面積 $\frac{r^2}{2}$

[2]

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} \\ &= s\vec{a} + t\vec{c} - (\vec{a} + \vec{c}) \\ &= (s-1)\vec{a} + (t-1)\vec{c}\end{aligned}$$

より、 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ であることに注意して

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BP}|^2 &= |(s-1)\vec{a} + (t-1)\vec{c}|^2 \\ &= (s-1)^2|\vec{a}|^2 + (t-1)^2|\vec{c}|^2 + 2(s-1)(t-1)\vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= r^2\{(s-1)^2 + (t-1)^2\}\end{aligned}$$

となる。

(答) $|\overrightarrow{BP}|^2 = r^2\{(s-1)^2 + (t-1)^2\}$

[3]

[2] より、 $(s-1)^2 + (t-1)^2 = \frac{|\overrightarrow{BP}|^2}{r^2}$

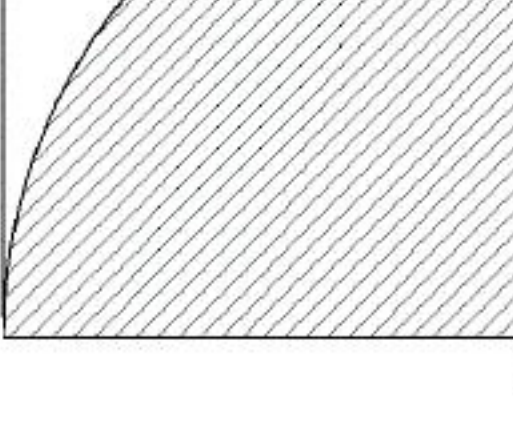
であるから

$$(s-1)^2 + (t-1)^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{BP}|^2}{r^2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{BP}| \leq r \left(\because |\overrightarrow{BP}| > 0, r > 0 \right)$$

となり、点Pの存在する範囲は次図の斜線部である。ただし、境界を含む。



したがつて、面積は $\frac{\pi r^2}{4}$ となる。
(答) 点Pの存在する範囲 前図斜線部(境界を含む)

面積 $\frac{\pi r^2}{4}$

[4]

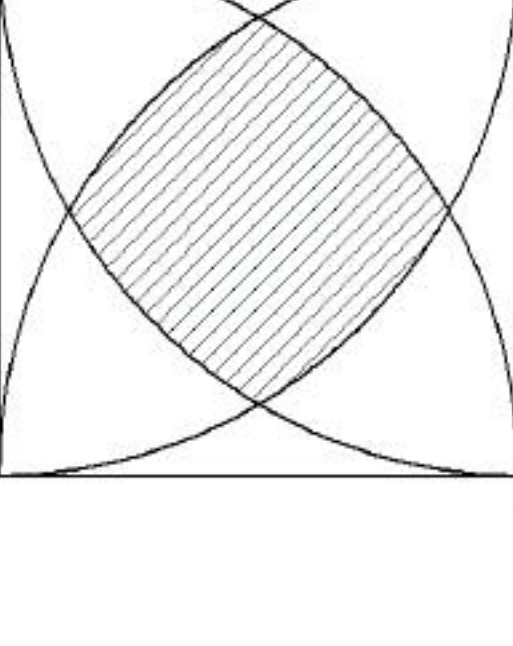
[2] [3] と同じように考えていくと

$$s^2 + t^2 = \frac{|\overrightarrow{OP}|^2}{r^2}, (s-1)^2 + t^2 = \frac{|\overrightarrow{AP}|^2}{r^2}, s^2 + (t-1)^2 = \frac{|\overrightarrow{CP}|^2}{r^2}$$

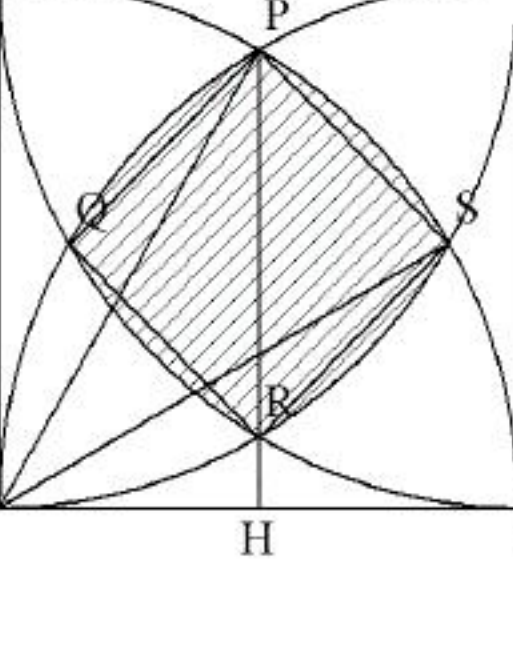
より、4つの条件は

$$|\overrightarrow{OP}| \leq r, |\overrightarrow{AP}| \leq r, |\overrightarrow{CP}| \leq r, |\overrightarrow{BP}| \leq r$$

となる。したがつて、点Pの存在する範囲は次図の斜線部である。ただし、境界を含む。



つぎに面積を求める。



上のように点P, Q, R, Sを定め、点Pから辺ABに下した垂線の足をHとおく。 $\triangle APB$ は正三角形だから

$$PH = \frac{\sqrt{3}}{2}r$$

となるから、対称性から

$$\begin{aligned}PR &= PH - (r - PH) \\ &= (\sqrt{3} - 1)r\end{aligned}$$

となる。よつて、四角形PQRSの面積は

$$\left\{(\sqrt{3} - 1)r\right\}^2 \times \frac{1}{2} = (2 - \sqrt{3})r^2$$

となる。また、斜線部から四角形PQRSを引いた部分の面積は、扇形APSから $\triangle APS$ を引いた面積の4倍に等しい。 $\angle PAB = 60^\circ$ であることと対称性から $\angle PAS = 30^\circ$ より

$$4 \times \left(\frac{\pi r^2}{12} - \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin 30^\circ \right) = \frac{\pi r^2}{3} - r^2$$

となる。よつて、面積は

$$(2 - \sqrt{3})r^2 + \frac{\pi r^2}{3} - r^2 = \left(1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right)r^2$$

となる。

(答) 点Pの存在する範囲 前図斜線部(境界を含む)

面積 $\left(1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right)r^2$