

I

〔解答〕

$$〔1〕 \quad \text{ア} \quad (3t^2 - 6t)x - 2t^3 + 3t^2 \quad \text{イ} \quad a + 1$$

$$\text{ウ} \quad 6a$$

$$\text{エ} \quad 2a^2$$

$$\text{オ} \quad 1$$

$$\text{カ} \quad a$$

$$\text{キ} \quad a^2(a-1)^2(2a-1) \quad \text{※オ, カは順不同}$$

$$〔2〕 \quad \text{ク} \quad 0 \quad \text{ケ} \quad \frac{1}{2}$$

〔解説〕

〔1〕

与えられた関数 $y = x^3 - 3x^2$ を微分すると,

$$y' = 3x^2 - 6x$$

となるから, 曲線 C 上の点 $(t, t^3 - 3t^2)$ における接線の方程式は,

と表せる。この直線が定点 $P(a, -2a^2)$ を通るとき,

$$-2a^2 = (3t^2 - 6t)a - 2t^3 + 3t^2$$

$$\Leftrightarrow 2t^3 - 3(a+1)t^2 + 6at - 2a^2 = 0 \quad \cdots \text{①}$$

が成り立つ。したがって, この接線が点 P を通るための必要十分条件は, t が方程式①を満たすことである。ここで $g(t) = 2t^3 - 3(a+1)t^2 + 6at - 2a^2$ とおくと, その導関数は

$$\begin{aligned} g'(t) &= 6t^2 - 6(a+1)t + 6a \\ &= 6\{t^2 - (a+1)t + a\} \end{aligned}$$

$$= 6(t-1)(t-a) \quad \cdots \text{②}$$

と計算できる。また,

$$\begin{aligned} g(1) &= 2 - 3(a+1) + 6a - 2a^2 \\ &= -2a^2 + 3a - 1 \\ &= -(2a-1)(a-1) \\ g(a) &= 2a^3 - 3(a+1)a^2 + 6a^2 - 2a^2 \\ &= -a^3 + a^2 \\ &= -a^2(a-1) \end{aligned}$$

であるから,

$$g(1)g(a) = a^2(a-1)^2(2a-1)$$

となる。

〔2〕

点 P から曲線 C に 3 本の接線が引けるための必要十分条件は, t に関する方程式①が異なる 3 つの実数解をもつことである。よって, $y = g(t)$ の極大値、極小値が異符号であることと同値である。したがって, 極値が存在するので, ②より $a \neq 1$ である。このとき, 極値は $g(1), g(a)$ となるので, 求める a の範囲は, $a \neq 1$ に注意して

$$\begin{aligned} g(1)g(a) &< 0 \\ \Leftrightarrow a^2(a-1)^2(2a-1) &< 0 \\ \Leftrightarrow a < 0, 0 < a < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であることがわかる。

II

〔解答〕

$$\text{コ} \quad \log p - 1 \quad \text{サ} \quad \frac{p}{e} \quad \text{シ} \quad \log p - k \quad \text{ス} \quad \frac{p}{e^k}$$

$$\text{セ} \quad \frac{e-2}{2e}p \quad \text{ソ} \quad \frac{1}{e} \quad \text{タ} \quad \frac{e-2}{2(e-1)}p$$

〔解説〕

点 P_k で接する接線を l_k とする。曲線 C は $y = \log x$ で与えられ、これを微分すると

$$y' = \frac{1}{x}$$

であるから、直線 l_0 の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{p}(x-p) + \log p \\ &= \frac{1}{p}x + \log p - 1 \end{aligned}$$

である。従って点 Q_1 の y 座標は $\log p - 1$ である。また、点 P_1 の x 座標は

$$\begin{aligned} \log p - 1 &= \log x \\ \Leftrightarrow \log \frac{p}{e} &= \log x \\ \therefore x &= \frac{p}{e} \end{aligned}$$

と求まる。

以後、点 P_k の x 座標、点 Q_k の y 座標をそれぞれ p_k, q_k ($k \in \mathbb{N}$, ただし $p_0 = 0$ とする。)とおくことにする。まず、点 P_k における接線 l_k の方程式は、同様にして

$$l_k: y = \frac{1}{p_k}x + \log p_k - 1$$

と求まるから、点 Q_{k+1} の y 座標 q_{k+1} は $\log p_k - 1$ であり、さらに点 P_{k+1} の x 座標 p_{k+1} は

$$\begin{aligned} \log p_k - 1 &= \log p_{k+1} \\ \Leftrightarrow \log \frac{p_k}{e} &= \log p_{k+1} \\ \therefore p_{k+1} &= \frac{1}{e}p_k \end{aligned}$$

と求まる。よって、

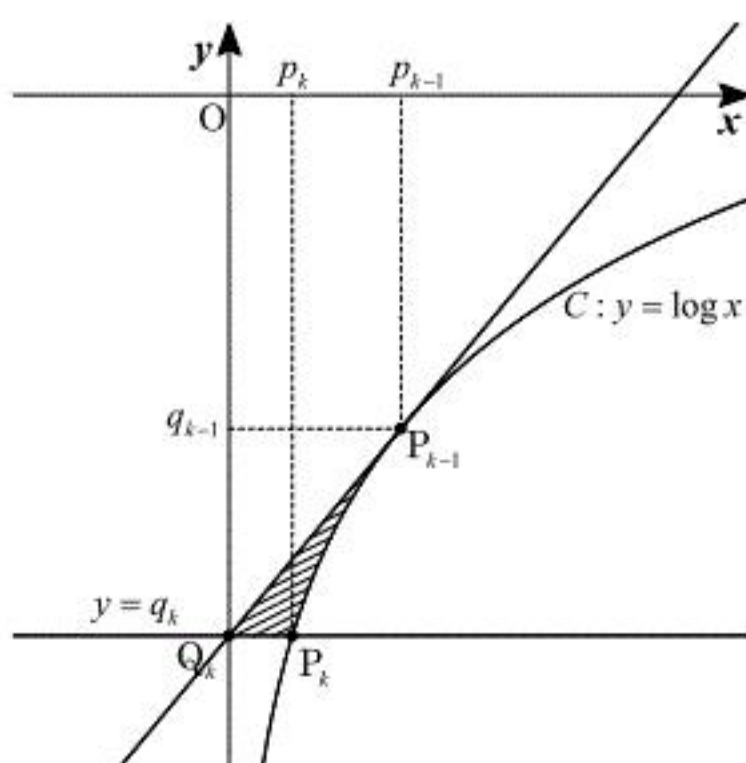
$$\begin{aligned} p_{k+1} &= \frac{1}{e}p_k \\ q_{k+1} &= \log p_k - 1 \end{aligned}$$

となるから、この漸化式を解くことで

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{p}{e^k} \quad (\because p_0 = p) \\ q_k &= \log \frac{p}{e^{k-1}} - 1 \\ &= \log p - k \end{aligned}$$

と求まる。

さらに、2 直線 $P_{k-1}Q_k$, Q_kP_k と曲線 C で囲まれた部分は以下の斜線部のようになるから、



この図形の面積 S_k は、以下の対応により、

y	q_k	$\rightarrow$	q_{k-1}
x	p_k	$\rightarrow$	p_{k-1}

$$\begin{aligned} S_k &= \int_{y=q_k}^{y=q_{k-1}} x dy - \frac{1}{2}(q_{k-1} - q_k)p_{k-1} \\ &= \int_{x=p_k}^{x=p_{k-1}} x \cdot \frac{dy}{dx} dx - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot p_{k-1} \\ &= \int_{p_k}^{p_{k-1}} dx - \frac{1}{2}p_{k-1} \left(\because \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{1}{2}p_{k-1} - p_k \end{aligned}$$

と計算できる。これに $k=1$ を代入すると、 $p_0 = p$, $p_1 = \frac{1}{e}p$ より、

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}p - \frac{1}{e}p \\ &= \frac{e-2}{2e}p \end{aligned}$$

が得られる。また、 $k \geq 2$ の範囲で

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{2}p_{k-1} - p_k \\ &= \frac{1}{e} \left(\frac{1}{2}p_{k-2} - p_{k-1} \right) \\ &= \frac{1}{e}S_{k-1} \end{aligned}$$

となるから、 $0 < \frac{1}{e} < 1$ より、無限等比級数の計算公式を利用することで

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} S_k &= \frac{S_1}{1 - \frac{1}{e}} \\ &= \frac{e}{e-1} \cdot \frac{e-2}{2e}p \\ &= \frac{e-2}{2(e-1)}p \end{aligned}$$

と求まる。

III

〔解答〕

$$\begin{array}{llllll} \text{チ} & \frac{3}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right) & \text{ツ} & 3 & \text{テ} & \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right) \\ & & & & \text{ト} & 2\left(a+\frac{1}{a}\right) \\ & & & & \text{ナ} & -\left(a+\frac{1}{a}\right) \\ \\ = & \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} & \text{ヌ} & -\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} & \text{ネ} & -\frac{\pi}{2} \\ & & & & \text{ノ} & -8 \end{array}$$

〔解説〕

与えられた関数 $f(x)$ に対して、三角関数の倍角の公式を利用して変形すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(2a - \frac{1}{a}\right) \frac{1 + \cos 2x}{2} + 3 \sin 2x + \left(\frac{2}{a} - a\right) \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ &= \frac{3}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right) \cos 2x + 3 \sin 2x + \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。三角関数の合成によって

$$f(x) = \frac{3}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \sin(2x + \alpha) + \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

となる。ただし、実数 $\alpha \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ は

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{\frac{3}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)}{\frac{3}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)} = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \\ \cos \alpha = \frac{3}{\frac{3}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)} = \frac{2a}{a^2 + 1} (> 0) \end{cases}$$

をみたす。よって x が実数全体を動くとき、 $\sin(2x + \alpha)$ は -1 以上 1 以下の任意の実数値をとるので、 $f(x)$ の最大値 M は

$$\begin{aligned} M &= \frac{3}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) (\because a > 0) \\ &= 2\left(a + \frac{1}{a}\right) \end{aligned}$$

であり、最小値 m は

$$\begin{aligned} m &= -\frac{3}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) (\because a > 0) \\ &= -\left(a + \frac{1}{a}\right) \end{aligned}$$

である。また、 $0 \leq x \leq \pi$ の範囲では、 $2x + \alpha$ の動く範囲は

$$\alpha \leq 2x + \alpha \leq 2\pi + \alpha$$

となるから、 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ に注意すると $2x + \alpha = \frac{\pi}{2}$ においてのみ $f(x)$ は最大となり、

$$\begin{aligned} f(x) &= M \\ \Leftrightarrow 2x + \alpha &= \frac{\pi}{2} \\ \therefore x_1 &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\alpha \end{aligned}$$

となる。また、 $2x + \alpha = \frac{3}{2}\pi$ においてのみ $f(x)$ は最小となり、

$$\begin{aligned} f(x) &= m \\ \Leftrightarrow 2x + \alpha &= \frac{3}{2}\pi \\ \therefore x_2 &= \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \cos 2x_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ \Leftrightarrow 2 \cos^2 x_1 - 1 &= \sin \alpha \\ \Leftrightarrow \cos^2 x_1 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}\right) \\ \therefore \cos x_1 &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} (> 0) \left(\because 0 < x_1 = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \cos x_2 &= \cos\left(x_1 + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin x_1 \\ &= -\sqrt{1 - \cos^2 x_1} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \end{aligned}$$

となる。また、

$$Mm = -2\left(a + \frac{1}{a}\right)^2$$

となり、 $a > 0$ であるから、相加平均と相乗平均に関する不等式より

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad (\text{等号成立は } a = 1 \text{ のとき})$$

となる。したがって、積 Mm のとりうる値の範囲は

$$Mm \leq -8$$

である。

IV

[解答]

ハ $\frac{1}{6}$ ヒ $\frac{1}{12}$ フ $\frac{7}{18}$ ヘ $\frac{1}{36}$

ホ $\frac{1}{144}$ マ $\frac{1}{324}$ ミ $\frac{43}{648}$

[解説]

各 X, Y がとりうる値にに対して、 $\frac{X}{Y}$ の値は以下の表の通りになる。

$\begin{smallmatrix} Y \\ \backslash X \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
2	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$
3	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$
4	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$
5	5	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{5}{6}$
6	6	3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$	1

上の表において、各値の組 (X, Y) に対応する事象は同様に確からしく起こるから、

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X}{Y}=1\right) &= \frac{6}{36} \\ &= \frac{1}{6} \\ \\ P\left(\frac{X}{Y}=2\right) &= \frac{3}{36} \\ &= \frac{1}{12} \\ \\ P\left(\frac{X}{Y} \in \mathbb{Z}\right) &= \frac{14}{36} \\ &= \frac{7}{18} \end{aligned}$$

と求まる。(ただし $\mathbb{Z}$ は整数全体を表す集合である。)

次に、さいころを投げる各試行は互いに影響を及ぼさないので、 $\frac{X}{Z}=1$ が成り立つ事象と

$\frac{Y}{W}=1$ が成り立つ事象は独立であると考えることができる。よって、これらが同時に成り立

つ確率は、前表より

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X}{Z}=1 \cap \frac{Y}{W}=1\right) &= P\left(\frac{X}{Z}=1\right) P\left(\frac{Y}{W}=1\right) \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^2 \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

と求まる。また、同様に考えることによって、前表より

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X}{Z}=2 \cap \frac{Y}{W}=\frac{1}{2}\right) &= P\left(\frac{X}{Z}=2\right) P\left(\frac{Y}{W}=\frac{1}{2}\right) \\ &= P\left(\frac{X}{Z}=2\right) P\left(\frac{W}{Y}=2\right) \\ &= \left(\frac{1}{12}\right)^2 \\ &= \frac{1}{144} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X}{Z}=3 \cap \frac{Y}{W}=\frac{1}{3}\right) &= P\left(\frac{X}{Z}=3\right) P\left(\frac{Y}{W}=\frac{1}{3}\right) \\ &= P\left(\frac{X}{Z}=3\right) P\left(\frac{W}{Y}=3\right) \\ &= \left(\frac{2}{36}\right)^2 \\ &= \frac{1}{324} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X}{Z}=\frac{3}{2} \cap \frac{Y}{W}=\frac{2}{3}\right) &= P\left(\frac{X}{Z}=\frac{3}{2}\right) P\left(\frac{Y}{W}=\frac{2}{3}\right) \\ &= P\left(\frac{X}{Z}=\frac{3}{2}\right) P\left(\frac{W}{Y}=\frac{3}{2}\right) \\ &= \left(\frac{2}{36}\right)^2 \\ &= \frac{1}{324} \end{aligned}$$

となる。さらに、

$$\begin{aligned} \frac{XY}{ZW} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{X}{Z} &= \frac{W}{Y} \end{aligned}$$

であるが、ここで前表において同じ数が出る回数と、その回数分だけ出る数を対応させた表をつくと以下のようになるから、

同じ数が出る回数	6	3	2	1
その回数分だけ出る数	1(1 個)	$2, \frac{1}{2}$ (2 個)	$3, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$ (4 個)	その他(16 個)

求める確率は

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X}{Z}=\frac{W}{Y}\right) &= \left\{P\left(\frac{X}{Z}=1\right)\right\}^2 + 2\left\{P\left(\frac{X}{Z}=2\right)\right\}^2 + 4\left\{P\left(\frac{X}{Z}=3\right)\right\}^2 + 16\left\{P\left(\frac{X}{Z}=4\right)\right\}^2 \\ &= \left(\frac{6}{36}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{36}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{36}\right)^2 + 16\left(\frac{1}{36}\right)^2 \\ &= \frac{36+18+16+16}{1296} \\ &= \frac{43}{648} \end{aligned}$$

となる。