

【解答】

[1]	ア	$2a-6$
	イ	$-a^2+9$
	ウ	$-2b+2$
	エ	b^2-1
	オ	4
	カ	8
	キ	0
[2]	ク	12
	ケ	$\frac{36}{25}$
	コ	6
[3]	サ	$\frac{1}{3}$
	シ	$\log_7 2$
	ス	$\frac{2}{5}$
	セ	3
	ソ	2014

【解説】

[1]

放物線 $P_1: y = x^2 - 6x + 9$ について、 $y' = 2x - 6$ より、 x 座標が a である点における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y - (a^2 - 6a + 9) &= (2a - 6)(x - a) \\ \Leftrightarrow y &= (2a - 6)x - a^2 + 9 \end{aligned}$$

となる。同様にして、放物線 $P_2: y = -x^2 + 2x - 1$ について、 $y' = -2x + 2$ より、 x 座標が b である点における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y - (-b^2 + 2b - 1) &= (-2b + 2)(x - b) \\ \Leftrightarrow y &= (-2b + 2)x + b^2 - 1 \end{aligned}$$

となる。これら 2 つの直線が一致するから、上の 2 式を比較して

$$\begin{cases} 2a - 6 = -2b + 2 \\ -a^2 + 9 = b^2 - 1 \end{cases}$$

となる。ここで 1 つ目の式から、

$$a = -b + 4$$

が得られ、これを 2 つ目の式に代入して

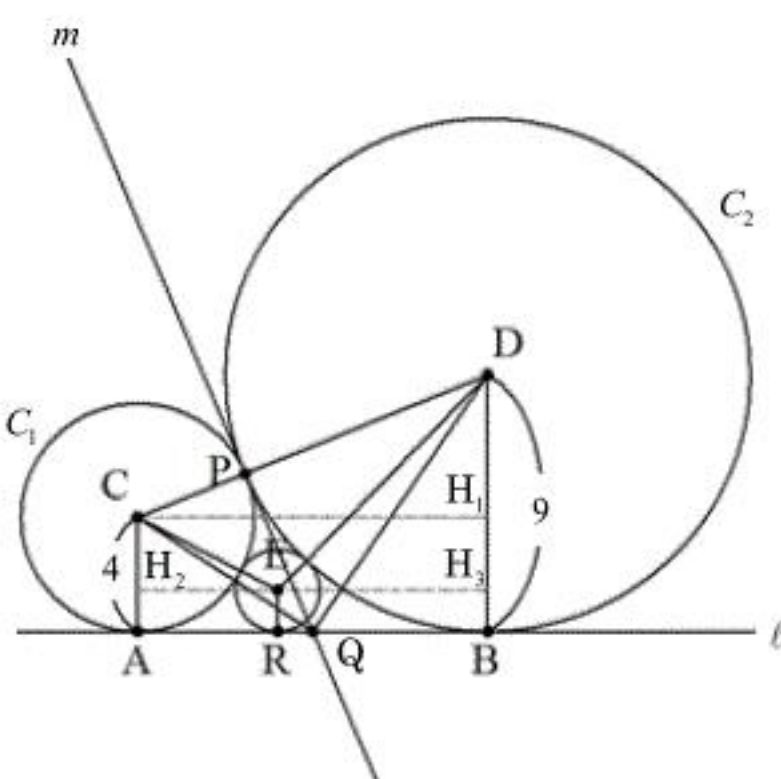
$$\begin{aligned} -(4 - b)^2 + 9 &= b^2 - 1 \\ \Leftrightarrow 2b^2 - 8b + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(b - 1)(b - 3) &= 0 \\ \therefore b &= 1, 3 \end{aligned}$$

となるから、求める直線の式は

$$y = 0, y = -4x + 8$$

となる。

[2]



円 C_1, C_2 の中心をそれぞれ C, D とし、この 2 つの円に外接し、直線 ℓ と接する円の中心を E とおく。また、中心 C から線分 BD におろした垂線の足を H_1 とし、中心 E から線分 AC, BD におろした垂線の足をそれぞれ H_2, H_3 とする。 $\triangle CDH_1$ に注目して、

$$\begin{aligned} CD^2 &= CH_1^2 + DH_1^2 \\ \Leftrightarrow (9 + 4)^2 &= CH_1^2 + (9 - 4)^2 \\ \Leftrightarrow CH_1 &= 12 \end{aligned}$$

を得る。したがって $CH_1 = AB$ より、 $AB = 12$ となる。次に、 $\triangle CEH_2$ と $\triangle DEH_3$ に注目することで

$$\begin{aligned} CE^2 &= CH_2^2 + EH_2^2 \\ \Leftrightarrow (4 + r)^2 &= (4 - r)^2 + EH_2^2 \\ \therefore EH_2 &= 4\sqrt{r} \\ ED^2 &= DH_3^2 + EH_3^2 \\ \Leftrightarrow (9 + r)^2 &= (9 - r)^2 + EH_3^2 \\ \therefore EH_3 &= 6\sqrt{r} \end{aligned}$$

となることがわかるから、

$$\begin{aligned} EH_2 + EH_3 &= AB \\ \Leftrightarrow 10\sqrt{r} &= 12 \\ \therefore r &= \frac{36}{25} \end{aligned}$$

となる。次に、 $\triangle AQC$ と $\triangle PQC$ は、 $CA = CP = 4$ と斜辺が共通より、直角三角形の斜辺とその他の一辺の長さがそれぞれ等しいから合同である。したがって、 $PQ = AQ$ となる。同様に、 $\triangle DQB$ と $\triangle DQP$ も合同より、 $PQ = BQ$ となる。以上より、

$$\begin{aligned} AB &= AQ + BQ \\ &= 2PQ \\ \therefore PQ &= \frac{1}{2}AB \\ &= 6 \end{aligned}$$

と求まる。

[3]

$32 < 49 < 64$ より、それぞれの辺に対して底を 7 とする対数をとって

$$\begin{aligned} \log_7 32 &< \log_7 49 < \log_7 64 \\ \Leftrightarrow \log_7 2^5 &< 2 < \log_7 2^6 \\ \Leftrightarrow 5\log_7 2 &< 2 < 6\log_7 2 \\ \therefore \frac{1}{3} &< \log_7 2 < \frac{2}{5} \end{aligned}$$

を得る。また、

$$\begin{aligned} \log_7 1024 &= \log_7 2^{10} \\ &= 10\log_7 2 \end{aligned}$$

より、上で得た不等式を用いて

$$\frac{10}{3} < 10\log_7 2 < 4$$

となるから、 $\log_7 1024$ の整数部分 a の値は $a = 3$ となる。また、定義から

$$a + b = \log_7 1024$$

であるから、

$$\begin{aligned} 2(7^{a+b} - 17) &= 2(7^{\log_7 1024} - 17) \\ &= 2(1024 - 17) \\ &= 2 \cdot 1007 \\ &= 2014 \end{aligned}$$

となる。

Ⅱ

〔解答〕

タ	9000
チ	9860
ツ	9600
テ	8500
ト	200
ナ	9860

〔解説〕

各仕入れ個数について、利益の期待値を考える。

[1] 180 個仕入れたとき

180 個すべてが売れるから

$$180 \cdot 50 + 0 \cdot (-90) = 9000 \text{ (円)}$$

の利益が出る。

[2] 200 個仕入れたとき

180 個売れた場合には、

$$180 \cdot 50 + 20 \cdot (-90) = 7200 \text{ (円)}$$

200 個売れた場合には、

$$200 \cdot 50 + 0 \cdot (-90) = 10000 \text{ (円)}$$

の利益が出るから、それぞれの場合が起こる確率を考慮した利益の期待値は

$$7200 \cdot \frac{5}{100} + 10000 \cdot \frac{95}{100} = 9860 \text{ (円)}$$

となる。

[3] 220 個仕入れたとき

[2]と同様にして考えると、利益の期待値は

$$\begin{aligned} & \{180 \cdot 50 + 40 \cdot (-90)\} \cdot \frac{5}{100} + \{200 \cdot 50 + 20 \cdot (-90)\} \cdot \frac{40}{100} + \{220 \cdot 50 + 0 \cdot (-90)\} \cdot \frac{55}{100} \\ &= 270 + 3280 + 6050 \\ &= 9600 \text{ (円)} \end{aligned}$$

となる。

[4] 240 個仕入れたとき

[2]と同様にして考えると、利益の期待値は

$$\begin{aligned} & \{180 \cdot 50 + 60 \cdot (-90)\} \cdot \frac{5}{100} + \{200 \cdot 50 + 40 \cdot (-90)\} \cdot \frac{40}{100} \\ &+ \{220 \cdot 50 + 20 \cdot (-90)\} \cdot \frac{30}{100} + \{240 \cdot 50 + 0 \cdot (-90)\} \cdot \frac{25}{100} \\ &= 180 + 2560 + 2760 + 3000 \\ &= 8500 \text{ (円)} \end{aligned}$$

となる。

[5] 260 個仕入れたとき

[2]と同様にして考えると、利益の期待値は

$$\begin{aligned} & \{180 \cdot 50 + 80 \cdot (-90)\} \cdot \frac{5}{100} + \{200 \cdot 50 + 60 \cdot (-90)\} \cdot \frac{40}{100} \\ &+ \{220 \cdot 50 + 40 \cdot (-90)\} \cdot \frac{30}{100} + \{240 \cdot 50 + 20 \cdot (-90)\} \cdot \frac{20}{100} + \{260 \cdot 50 + 0 \cdot (-90)\} \cdot \frac{5}{100} \\ &= 90 + 1840 + 2220 + 2040 + 650 \\ &= 6840 \text{ (円)} \end{aligned}$$

となる。

以上, [1]から[5]より, 200 個の商品を仕入れたときに, 最も利益の期待値が高くなり, 利益 9860 円が期待される。

Ⅲ

[1]

題意より,

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから, 実数 s, t を用いて,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4-4s \\ 4s \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= t\overrightarrow{OC} \\ &= \begin{pmatrix} t \\ t \\ \sqrt{6}t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表せる。ここで,

$$\begin{aligned} &\text{「直線 AB と直線 OC が交わる」} \\ \Leftrightarrow &\text{「}\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}\text{ となる点 P, Q が存在する」} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-4s=t & \text{①} \\ 4s=t & \text{②} \\ 0=\sqrt{6}t & \text{③} \end{cases}$$

を満たす実数 s, t が存在する

が成り立つ。しかし③より $t=0$ となり, これを②に代入すると $s=0$ となることが必要だが, これらを①に代入すると,

$$4=0$$

となり, 不適である。したがって, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$ となる点 P, Q は存在しないから, 直線 AB と直線 OC は交わらないことが示された。

(証明終)

[2]

$|\overrightarrow{PQ}|$ が最小となるとき $|\overrightarrow{PQ}|^2$ も最小となるので, $|\overrightarrow{PQ}|^2$ が最小となるような (s, t) を求める。

[1] より,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 &= |\overrightarrow{OQ}|^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} + |\overrightarrow{OP}|^2 \\ &= (t^2 + t^2 + 6t^2) - 2\{(4-4s)t + 4st + 0 \cdot \sqrt{6}t\} + \{(4-4s)^2 + 16s^2\} \\ &= 8t^2 - 8t + 32s^2 - 32s + 16 \\ &= 8\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 32\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + 6 \end{aligned}$$

となるから, $|\overrightarrow{PQ}|^2$ は $(s, t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ のとき, 最小値 6 をとる。すなわち, $|\overrightarrow{PQ}|$ は

$(s, t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ のとき, 最小値 $\sqrt{6}$ をとる。このとき,

$$P(2, 2, 0), Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

である。

$$\text{(答) PQ の最小値: } \sqrt{6}, P(2, 2, 0), Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

[3]

三角形 ABR が正三角形になるための条件は

$$AB = BR = AR$$

であり,

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

であるから,

$$BR = 4\sqrt{2} \quad \text{かつ} \quad AR = 4\sqrt{2} \quad \dots \text{④}$$

を満たす点 R の座標を求めればよい。点 R は直線 OC 上にあるから,

$$BR = AR = \sqrt{t^2 + (t-4)^2 + (\sqrt{6}t)^2} \quad \dots \text{⑤}$$

となるため, ④, ⑤より

$$\begin{aligned} \sqrt{t^2 + (t-4)^2 + (\sqrt{6}t)^2} &= 4\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow t^2 + (t-4)^2 + (\sqrt{6}t)^2 &= 32 \\ \Leftrightarrow (t-2)(t+1) &= 0 \\ \therefore t &= -1, 2 \end{aligned}$$

と求まる。したがって, 求める点 R の座標は

$$(-1, -1, -\sqrt{6}), (2, 2, 2\sqrt{6})$$

である。

$$\text{(答) } (-1, -1, -\sqrt{6}), (2, 2, 2\sqrt{6})$$